

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA  
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

MODELOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES:  
CONSECUENCIAS DE LA ASIMETRÍA POSITIVA EN LOS  
INDICADORES ENDÓGENOS SOBRE LAS  
ESTIMACIONES PUNTUALES DE SUS COEFICIENTES Y  
LA BONDAD DE AJUSTE

Tesis sometida a la consideración de la Comisión del  
Programa de Estudios de Posgrado en Estadística para  
optar al grado y título de Maestría Académica en  
Estadística

REBECA SURÁ-FONSECA

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Costa Rica

2020

## **DEDICATORIA**

A mi mamá, a mi papá y a mi hermano, por siempre estar.

## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero agradecer a mi Comité de Tesis. A Eiliana Montero, por su disposición a dirigir la tesis y tener la apertura de construir procesos de investigación conmigo. A Ricardo, por siempre mostrar disposición a atender mis dudas y leer la tesis con dedicación. A Luis, por sus finos aportes y atinadas correcciones.

A mi hermano, por poner a mi disposición todas las computadoras de la casa para simular desde Buenos Aires. A AAA, por su inmenso apoyo en todo el proceso de tesis y correr simulaciones en su oficina. A Fercho, por correr parte de mis simulaciones desde su oficina en Michigan.

A mi familia extendida, por siempre creer en mí.

Finalmente, quiero agradecer a la Universidad de Costa Rica, por permitirme crecer como persona, mujer y profesional.

“Esta Tesis fue aceptada por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Estadística de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado y título de Maestría Académica en Estadística”



---

Dra. Vanessa Smith Castro  
**Representante del Decano**  
**Sistema de Estudios de Posgrado**



---

Dra. Eiliana Montero Rojas  
**Profesora Guía**



---

Dr. Ricardo Alvarado Barrantes  
**Lector**



---

M.Sc. Luis Rojas Torres  
**Lector**



---

M.Sc. Johnny Madrigal Pana  
**Director**  
**Programa de Posgrado en Estadística**



---

Rebeca Sura Fonseca  
**Sustentante**

# TABLA DE CONTENIDOS

<b>DEDICATORIA.....</b>	<b>ii</b>
<b>AGRADECIMIENTOS.....</b>	<b>ii</b>
<b>TABLA DE CONTENIDOS .....</b>	<b>iv</b>
<b>RESUMEN .....</b>	<b>vi</b>
<b>LISTA DE CUADROS.....</b>	<b>vii</b>
<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>ix</b>
<b>LISTA DE ANEXOS.....</b>	<b>xii</b>
<b>1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción .....	1
1.2 Justificación .....	3
1.3 Planteamiento de investigación .....	5
1.3.1 Pregunta de investigación .....	5
1.3.2 Objetivos generales.....	5
1.3.3 Objetivos específicos.....	5
<b>2. ENCUADRE TEÓRICO.....</b>	<b>7</b>
2.1 Los modelos de ecuaciones estructurales.....	7
2.2 Estimación de los modelos de ecuaciones estructurales.....	8
2.3 Evaluación del ajuste de los modelos estructurales .....	13
2.4 Antecedentes de investigación sobre la asimetría en la distribución de las variables indicadoras y las estimaciones dadas por máxima verosimilitud en modelos de ecuaciones estructurales.....	16
<b>3. ABORDAJE METODOLÓGICO.....</b>	<b>25</b>
3.1 Diseño de simulación para el estudio del efecto de la asimetría positiva en un modelo de ecuaciones estructurales con una variable endógena y dos exógenas .....	25
3.2 El modelo de simulación.....	27
3.3 Escenarios para la simulación.....	29
3.4 La generación de asimetría en las variables indicadoras .....	31
3.5 Medidas de bondad de ajuste y coeficientes .....	35
<b>4. RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES .....</b>	<b>37</b>
4.1 Resultados sobre las cargas factoriales .....	38
4.2 Resultados sobre los coeficientes del modelo estructural.....	54
4.3 Resultados sobre los estadísticos de bondad de ajuste .....	62



4.4 Conclusiones .....	82
<b>5. EL CASO EMPÍRICO: ASIMETRÍA POSITIVA EN EL MODELO DE ECUACIONES ESTRUCTURALES PARA LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL .</b>	<b>85</b>
5.1 Población de estudio y muestra .....	85
5.2 Los datos y el modelo .....	90
5.3 Relación del modelo propuesto con los hallazgos de simulación ....	96
5.4 Comparación de los resultados del modelo estimado con máxima verosimilitud y otros métodos robustos al incumplimiento del supuesto de multinormalidad.....	96
<b>6. CONCLUSIONES.....</b>	<b>103</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>109</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>116</b>

# RESUMEN

La investigación que se desarrolla en las siguientes páginas tiene la finalidad de responder una de las preguntas más frecuentes que se hacen los estadísticos y las personas investigadoras que utilizan los modelos de ecuaciones estructurales: ¿hasta qué punto el método de estimación de máxima verosimilitud es robusto al incumplimiento del supuesto de distribución de normalidad en las variables medibles del modelo?

Mediante un estudio de simulaciones, basado en un modelo con dos variables exógenas y una endógena, en el que cada una de dichas variables latentes tiene tres variables indicadoras y las tres correspondientes a la variable endógena incumplen el supuesto de normalidad, pues presentan asimetrías positivas, se concluye que las estimaciones de las cargas factoriales, los coeficientes del modelo estructural y los índices de bondad de ajuste (chi-cuadrado, RMSEA, SRMR, GFI) no sufren modificaciones relevantes a nivel práctico. Con ello se prueba que bajo el contexto del modelo de simulación especificado, la estimación por máxima verosimilitud es robusta al incumplimiento del supuesto de normalidad.

Cabe destacar que el estudio de simulaciones contiene 18 escenarios de simulación, en los cuales se varía el tamaño de muestra, la magnitud del nivel de asimetría y el número de variables indicadoras de la variable endógena con asimetría. Cada escenario cuenta con 500 iteraciones del modelo y es comparado con un escenario control, que funciona como línea de base (pues es un escenario que cumple el supuesto de distribución) para determinar los efectos de la asimetría y el tamaño de muestra en las estimaciones puntuales del modelo.

# LISTA DE CUADROS

Cuadro 1 Escenarios de simulación según las variaciones en las condiciones de simulación: nivel de asimetría, cantidad de variables asimétricas y tamaños de muestra. ....	31
Cuadro 2 Media, desviación estándar, percentiles 2,5 y 97,5 de las cargas factoriales $\lambda_{x_{11}}$ , $\lambda_{x_{21}}$ , $\lambda_{x_{31}}$ estimadas en 500 iteraciones para cada escenario de simulación .....	40
Cuadro 3 Media, desviación estándar, percentiles 2,5 y 97,5 de las cargas factoriales $\lambda_{x_{42}}$ , $\lambda_{x_{52}}$ , $\lambda_{x_{62}}$ estimadas en 500 iteraciones para cada escenario de simulación .....	41
Cuadro 4 Media, desviación estándar, percentiles 2,5 y 97,5 de las cargas factoriales asociadas a la variable endógena $\lambda_{y_{11}}$ , $\lambda_{y_{21}}$ , $\lambda_{y_{31}}$ estimadas en 500 iteraciones para cada escenario de simulación .....	44
Cuadro 5 Media, desviación estándar, percentiles 2,5 y 97,5 de los coeficientes del modelo estructural $\gamma_{11}$ y $\gamma_{12}$ estimadas en 500 iteraciones para cada escenario de simulación .....	55
Cuadro 6 Media, desviación estándar, percentiles 2,5 y 97,5 de las estimaciones de RMSEA, en las 500 iteraciones para cada escenario de simulación.....	64
Cuadro 7 Media, desviación estándar, percentiles 2,5 y 97,5 de las estimaciones de SRMR, en las 500 iteraciones para cada escenario de simulación.....	68
Cuadro 8 Media, desviación estándar, percentiles 2,5 y 97,5 de las estimaciones de GFI, en las 500 iteraciones para cada escenario de simulación .....	73
Cuadro 9 Media, desviación estándar, percentiles 2,5 y 97,5 del estadístico Chi-cuadrado estimadas en las 500 iteraciones para cada escenario de simulación .....	78
Cuadro 10 Cupos disponibles para ingreso a carrera según modalidad de ingreso a carrera en el 2016 .....	88
Cuadro 11 Cursos de las carreras que aplicaron la PHC en el 2016, en el cual se realizó la recolección de datos .....	89
Cuadro 12 Coeficientes estandarizados y errores estándar de las cargas factoriales y los coeficientes de regresión del modelo para habilidades visuoespaciales estimados con cuatro métodos de estimación .....	100

Cuadro 13 Medidas de bondad de ajuste para el modelo de habilidades visuoespaciales obtenidas con cuatro modelos de estimación .....	101
--	-----

# LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Distribución del coeficiente $\lambda_{y_{11}}$ basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y un tamaño de muestra de 100 para cada escenario de simulación .....	48
Figura 2 Distribución del coeficiente $\lambda_{y_{11}}$ basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y un tamaño de muestra de 200 para cada escenario de simulación .....	49
Figura 3 Distribución del coeficiente $\lambda_{y_{21}}$ basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y un tamaño de muestra de 100 para cada escenario de simulación .....	50
Figura 4 Distribución del coeficiente $\lambda_{y_{21}}$ basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y un tamaño de muestra de 200 para cada escenario de simulación .....	51
Figura 5 Distribución del coeficiente $\lambda_{y_{31}}$ basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y un tamaño de muestra de 100 para cada escenario de simulación .....	52
Figura 6 Distribución del coeficiente $\lambda_{y_{31}}$ basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y un tamaño de muestra de 200 para cada escenario de simulación .....	53
Figura 7 Distribución del coeficiente $\gamma_{11}$ y $\gamma_{12}$ basada en 500 iteraciones del modelo de simulación para tamaños de muestra de 100 y 200 observaciones cuando se cumple el supuesto de multinormalidad .....	56
Figura 8 Distribución del coeficiente $\gamma_{11}$ basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y un tamaño de muestra de 100 para cada escenario de simulación .....	58
Figura 9 Distribución del coeficiente $\gamma_{11}$ basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y un tamaño de muestra de 200 para cada escenario de simulación .....	59
Figura 10 Distribución del coeficiente $\gamma_{12}$ basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y tamaño de muestra de 100 para cada escenario de simulación .....	60

Figura 11 Distribución del coeficiente $\gamma_{12}$ según las 500 iteraciones del modelo de simulación y tamaño de muestra de 200 para cada escenario de simulación .....	61
Figura 12 Distribución de la medida de bondad de ajuste RMSEA, basada en las 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es igual a 100 y a 200 y una distribución multinormal en las parcelas, con los percentiles 2,5 y 97,5.....	63
Figura 13 Distribución de RMSEA, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación, con los percentiles 2,5 y 97,5 .....	65
Figura 14 Distribución de RMSEA, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación, con los percentiles 2,5 y 97,5 .....	66
Figura 15 Distribución de la medida de bondad de ajuste SRMR, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es igual a 100 y a 200 y con hay distribución multinormal en las parcelas, con los percentiles 2,5 y 97,5.....	67
Figura 16 Distribución de SRMR, basada en las 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación, con los percentiles 2,5 y 97,5 .....	70
Figura 17 Distribución de SRMR, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación, con los percentiles 2,5 y 97,5 .....	71
Figura 18 Distribución de la medida de bondad de ajuste GFI, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es igual a 100 y a 200 y con hay distribución multinormal en las parcelas, con los percentiles 2,5 y 97,5.....	72
Figura 19 Distribución de GFI, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación, con los percentiles 2,5 y 97,5 .....	75
Figura 20 Distribución de GFI, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación, con los percentiles 2,5 y 97,5 .....	76
Figura 21 Distribución de la medida de bondad de ajuste chi-cuadrado, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es	

igual a 100 y a 200 y no hay asimetría en las variables medibles, con los percentiles 2,5 y 97,5 .....	77
Figura 22 Distribución del estadístico chi-cuadrado, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación, con los percentiles 2,5 y 97,5.....	80
Figura 23 Distribución del estadístico chi-cuadrado, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación con los percentiles 2,5 y 97,5.....	81
Figura 24 Modelo causal para las habilidades visuoespaciales, las habilidades cuantitativas y el capital, con coeficientes estandarizados.....	99

# LISTA DE ANEXOS

Anexo 1 Porcentajes de no convergencia de cada uno de los escenarios de simulación, según las variaciones en las condiciones de simulación (nivel de asimetría, cantidad de variables asimétricas y tamaños de muestra). ....	116
Anexo 2 Histogramas de la distribución del coeficiente $\lambda_{y_{11}}$ , $\lambda_{21}$ y $\lambda_{y_{31}}$ según las 500 iteraciones para los dos escenarios con tamaños de muestra de 100 y 200 y con distribución multinormal en las variables medibles .....	117
Anexo 3 Gráficos de densidad de $\lambda_{y_{11}}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste) .....	118
Anexo 4 Gráficos de densidad de $\lambda_{y_{11}}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste) .....	119
Anexo 5 Gráficos de densidad de $\lambda_{y_{21}}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste) .....	120
Anexo 6 Gráficos de densidad de $\lambda_{y_{21}}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste) .....	121
Anexo 7 Gráficos de densidad de $\lambda_{y_{31}}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste) .....	122
Anexo 8 Gráficos de densidad de $\lambda_{y_{31}}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste) .....	123
Anexo 9 Gráficos de densidad de $\gamma_{11}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste) .....	124
Anexo 10 Gráficos de densidad de $\gamma_{11}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste) .....	125



Anexo 11 Gráficos de densidad de $\gamma_{12}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste).....	126
Anexo 12 Gráficos de densidad de $\gamma_{12}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste).....	127



UNIVERSIDAD DE  
COSTA RICA

SEP Sistema de  
Estudios de Posgrado

Autorización para digitalización y comunicación pública de Trabajos Finales de Graduación del Sistema de Estudios de Posgrado en el Repositorio Institucional de la Universidad de Costa Rica.

Yo, Rebeca Sura Fonseca, con cédula de identidad 7 0206 0426, en mi condición de autor del TFG titulado Modulo de ecuaciones

estructurales: consecuencias de la asimetría positiva en los  
indicadores endógenos sobre las estimaciones puntuales de sus  
coeficientes y la bondad de ajuste

Autorizo a la Universidad de Costa Rica para digitalizar y hacer divulgación pública de forma gratuita de dicho TFG a través del Repositorio Institucional u otro medio electrónico, para ser puesto a disposición del público según lo que establezca el Sistema de Estudios de Posgrado. SI ☒ NO ☐

\*En caso de la negativa favor indicar el tiempo de restricción: \_\_\_\_\_ año (s).

Este Trabajo Final de Graduación será publicado en formato PDF, o en el formato que en el momento se establezca, de tal forma que el acceso al mismo sea libre, con el fin de permitir la consulta e impresión, pero no su modificación.

Manifiesto que mi Trabajo Final de Graduación fue debidamente subido al sistema digital Kerwá y su contenido corresponde al documento original que sirvió para la obtención de mi título, y que su información no infringe ni violenta ningún derecho a terceros. El TFG además cuenta con el visto bueno de mi Director (a) de Tesis o Tutor (a) y cumplió con lo establecido en la revisión del Formato por parte del Sistema de Estudios de Posgrado.

#### INFORMACIÓN DEL ESTUDIANTE:

Nombre Completo: Rebeca Sura Fonseca

Número de Carné: A86329 Número de cédula: 7 0206 0426

Correo Electrónico: reb.sura@gmail.com

Fecha: 27 - febrero - 2020 Número de teléfono: 83162474

Nombre del Director (a) de Tesis o Tutor (a): Dra. Eiliana Montero Rojas

Rebeca Sura F.

FIRMA ESTUDIANTE

Nota: El presente documento constituye una declaración jurada, cuyos alcances aseguran a la Universidad, que su contenido sea tomado como cierto. Su importancia radica en que permite abreviar procedimientos administrativos, y al mismo tiempo genera una responsabilidad legal para que quien declare contrario a la verdad de lo que manifiesta, puede como consecuencia, enfrentar un proceso penal por delito de perjurio, tipificado en el artículo 318 de nuestro Código Penal. Lo anterior implica que el estudiante se vea forzado a realizar su mayor esfuerzo para que no sólo incluya información veraz en la Licencia de Publicación, sino que también realice diligentemente la gestión de subir el documento correcto en la plataforma digital Kerwá.

# 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

## 1.1 Introducción

El uso de los modelos de ecuaciones estructurales cada día es más popular en aplicaciones de investigaciones de las ciencias sociales. Ello, debido a que es común que los investigadores de estas áreas se interesen en analizar las posibles relaciones entre *constructos*, basados en un modelo generado a partir de un entramado teórico producto de investigación científica.

Al mismo tiempo, este tipo de modelo se ha popularizado cada vez más debido a que este posee las características para estudiar, empíricamente, la viabilidad de una teoría sustantiva que usualmente involucra variables observadas y latentes.

Las variables observadas, también llamadas medibles o indicadores son las variables que se puede medir directamente como, por ejemplo: la presión arterial sistólica, la calificación en conocimientos matemática, los conocimientos en geometría, entre otras.

Debido a la gran variabilidad que tienen las conductas humanas y los distintos grupos de sujetos sociales, es frecuente que las variables se distribuyan asimétricamente. En otras palabras, usualmente las variables indicadoras empleadas en el estudio del comportamiento humano suelen tener distribuciones distintas a la normal.

La presencia de distribuciones asimétricas no es adecuada para utilizar el método de estimación de máxima verosimilitud –el cual es el de mayor uso en los modelos de ecuaciones estructurales– pues ello implica el incumplimiento del supuesto de distribución multinormal de las variables indicadoras.

En ese sentido, la presente investigación pretende mostrar las consecuencias de violentar el supuesto de multinormalidad en las variables indicadoras de una variable endógena en la estimación por máxima verosimilitud. Específicamente, se pretende generar evidencia de las consecuencias de la asimetría en las estimaciones de los modelos estructurales.

Con ello se busca brindar, a la comunidad estadística y científica, nociones concretas de las implicaciones de violentar dicho supuesto distributivo de las variables indicadoras en distintos escenarios de: 1) tamaño de muestra, 2) nivel de asimetría de las variables observadas en la variable endógena, y 3) número de variables asimétricas, en el contexto de un modelo SEM con una variable endógena y dos variables exógenas.

A partir de los resultados que se obtienen de un estudio de simulación que contempla las variantes antes citadas sobre un problema estadístico relacionado con los modelos de ecuaciones estructurales, se lleva a cabo el análisis de un caso empírico que presenta asimetría en las variables medibles de la variable endógena de un modelo SEM. Dicho caso es un modelo de ecuaciones estructurales con una única variable endógena: las habilidades en visualización espacial de un grupo de estudiantes que ingresaron a la Universidad de Costa Rica (UCR) en el 2016, las cuales se midieron con un test de visualización espacial.

Dicha variable endógena se predice por dos variables: las habilidades cuantitativas (medidas por la Prueba de Habilidades Cuantitativas de la UCR) y el capital (en términos de bienes materiales) de los estudiantes de la muestra con la que se trabaja. Por tanto, estas dos últimas se constituyen como las variables exógenas en el modelo de ecuaciones estructurales empírico planteado.

Hay una lógica teórica que respalda la estimación de este modelo empírico que es explicada oportunamente en el capítulo 5, pero lo que busca esencialmente, es ilustrar el uso y los alcances de los hallazgos que se obtienen del estudio basado en simulaciones. Es decir, este ejercicio de análisis mediante un caso

empírico es un mecanismo de validación de los resultados obtenidos, en el cual se comparan los resultados del modelo estimado con el método de máxima verosimilitud y tres diversos métodos de estimación de modelos de ecuaciones estructurales robustos al incumplimiento del supuesto de multinormalidad en las variables indicadoras. Esto permite comparar el sesgo que produce el primer método de estimación respecto a los otros métodos, los cuales coinciden y confirman lo obtenido en el estudio basado en simulaciones.

## **1.2 Justificación**

A la hora de ajustar modelos de ecuaciones estructurales (SEM) con estimación por máxima verosimilitud, se debe verificar el supuesto distributivo de normalidad multivariante en las variables observadas del modelo. Omitir este procedimiento, conlleva que se generen estimaciones sesgadas en los diversos parámetros y estadísticos en el modelo.

Sin embargo, es válido cuestionarse hasta qué grado de asimetría en las variables medibles dicho método de estimación empieza a sesgar la magnitud de los coeficientes. En otras palabras, es pertinente generar evidencia para indicar ante cuáles umbrales de asimetría, los modelos SEM estimados por el método de máxima verosimilitud podrían permitir este tipo de estimación, en aras de impulsar las buenas prácticas estadísticas.

Las investigaciones realizadas sobre la presencia de asimetría en las variables indicadoras en modelos SEM estimados por medio de máxima verosimilitud, esencialmente emplean modelos estructurales para realizar análisis confirmatorio para un factor o dos, sin la presencia de variables endógenas.

Por tanto, para ampliar los conocimientos de la comunidad científica, en esta investigación se pretende ilustrar de qué forma, ante diferentes escenarios de asimetría positiva para las variables indicadoras de la variable endógenas de un modelo de ecuaciones estructurales con dos variables exógenas y una endógena, se modifican las estimaciones del modelo.

Lo anterior se lleva a cabo mediante el análisis de la robustez del método de estimación por máxima verosimilitud, para concluir en qué nivel de asimetría positiva es adecuado su uso y cuáles son sus consecuencias. De manera que con la presente investigación se pretende realizar un aporte metodológico en esa dirección, al analizar el efecto de la asimetría positiva en las variables indicadoras de un modelo de ecuaciones estructurales con una variable endógena en: los parámetros (cargas factoriales y coeficientes del modelo estructural), el RMSEA y el estadístico chi-cuadrado. Es decir, analizando la variación del ajuste y las estimaciones.

Al llevar a cabo el análisis comentado anteriormente, se puede verificar si la presencia de asimetría positiva en diferentes magnitudes, tamaños de muestra y número de variables asimétricas en las variables observadas provoca que las estadísticas de ajuste asociadas pueden ser incorrectas (dando falsos resultados significativos, como en el caso del estadístico chi-cuadrado) y, además, que las estimaciones de los parámetros (cargas factoriales y coeficientes del modelo estructural) resulten subestimadas o sobrestimadas.

Con el fin de mostrar la utilidad práctica de los resultados del análisis del desempeño del método de estimación por máxima verosimilitud ante asimetría positiva descrito previamente, se realiza una aplicación de modelos de ecuaciones estructurales a un problema de investigación de Ciencias Sociales.

La aplicación consiste en el ajuste de un modelo de ecuaciones estructurales, en el cual la variable endógena es una medición de las habilidades visoespaciales operacionalizadas mediante el test de Gerardo Prieto de habilidades en visualización espacial; las variables exógenas son mediciones de las habilidades cuantitativas de acuerdo por el puntaje obtenido en la Prueba de Habilidades Cuantitativas (PHC) de la UCR y el capital material de los individuos de la muestra cuantificado por escalas de las pruebas PISA.

Este modelo empírico se ajusta a los fines de esta investigación por dos razones: 1) permite analizar un caso real de estimación de un modelo de ecuaciones

estructurales que pretende abordar, mediante una relación causal, el comportamiento humano, y 2) los datos de la variable endógena en cuestión (las habilidades visoespaciales) no permiten la generación de variables indicadoras que cumplan el supuesto de normalidad (esencial para la estimación llevada a cabo por el método de la máxima verosimilitud), mientras que las variables exógenas sí; tal como el modelo de simulación que se plantea.

### **1.3 Planteamiento de investigación**

#### 1.3.1 Pregunta de investigación

¿Cuál es el efecto de la asimetría positiva en las variables indicadoras de la variable endógena sobre la estimación de los coeficientes y el ajuste de un modelo de ecuaciones estructurales con una variable endógena y dos exógenas?

#### 1.3.2 Objetivos generales

1. Analizar el efecto de la asimetría positiva en las variables indicadoras de la variable endógena sobre la estimación de los coeficientes y el ajuste de un modelo de ecuaciones estructurales con una variable endógena y dos exógenas.

#### 1.3.3 Objetivos específicos

1. Analizar el efecto de la asimetría positiva de las variables indicadoras de la variable endógena sobre las cargas factoriales y los parámetros de un modelo de ecuaciones estructurales de dos variables exógenas y una endógena.
2. Estudiar el efecto de la asimetría positiva en las variables indicadoras sobre el ajuste de un modelo estructural con una variable endógena y dos variables exógenas.
3. Estudiar el efecto de la asimetría positiva en las variables indicadoras sobre las estimaciones de un modelo estructural con una variable endógena y dos variables exógenas para diversos tamaños de muestra,

diversa magnitud de asimetría positiva y diversa cantidad de variables asimétricas positivas en las variables indicadoras de la variable endógena.

4. Estudiar el impacto de la asimetría positiva en las variables medibles de la variable endógena del caso empírico de un modelo de ecuaciones estructurales cuya variable endógena son las habilidades visoespaciales de un conjunto de estudiantes de la UCR.



## 2. ENCUADRE TEÓRICO

En esta sección se discuten algunos elementos teóricos sobre los modelos de ecuaciones estructurales como su estimación y los efectos de la asimetría en las variables indicadoras de estos hallados en otras investigaciones. Por otra parte, se discute la naturaleza de las medidas de bondad de ajuste que se utilizarán para evaluar los modelos estructurales que se ajustan en los resultados.

### 2.1 Los modelos de ecuaciones estructurales

Los modelos de ecuaciones estructurales, o SEM, son una técnica de modelado estadístico ampliamente utilizada en las ciencias del comportamiento. Estos se pueden ver como una combinación de análisis de factores y regresión o análisis de trayectoria.

El modelado de ecuaciones estructurales utiliza varios tipos de modelos para representar las relaciones entre las variables observadas, con el mismo objetivo básico de proporcionar una prueba cuantitativa de un modelo teórico hipotético, propuesto una persona investigadora. Más específicamente, varios modelos teóricos pueden probarse en SEM que hipotetizan cómo los conjuntos de variables definen *constructos* y cómo estos *constructos* se relacionan entre sí (Shumacker y Lomax, 2004).

La principal característica de estos modelos es que permiten trabajar con *constructos* teóricos, que están representados por los factores o variables latentes. En el modelo, las relaciones entre los *constructos* teóricos están representadas por regresiones o coeficientes de trayectoria entre los factores.

Dicho tipo de modelos estadísticos posee diversas clases de variables; por un lado, las variables medidas (que también son llamadas variables observadas, manifiestas o indicadores) y, por otro lado, los factores o variables latentes. Según Rojas (2014), “desde un punto de vista no formal, se define variable latente como un constructo hipotético que no puede ser medido directamente, o una variable que subyace o influye a un conjunto de variables observadas. Desde un

enfoque formal, las variables latentes son las causantes de la asociación entre un conjunto de variables observadas, y desde una posición operacional, son las variables que se definen a partir de la variancia común de las variables observadas” (Bollen, 2002).

Al mismo tiempo, las variables latentes se pueden clasificar como "variables independientes" o "variables dependientes". Dicha clasificación se realiza sobre la base de un modelo causal teórico, formal o informal; es decir, que el entramado de relaciones estructurales representado en el modelo está basado en una propuesta teórica que se desprende de procesos de investigación o bien de comprobación de hipótesis sobre la asociación de *constructos*.

Una particularidad de los modelos de ecuaciones estructurales es que el modelo causal se representa mediante un diagrama en el que las variables indicadoras están dentro de los rectángulos y las variables latentes se representan con círculos o elipses. Estas figuras se conectan con flechas, en las cuales una sola punta de flecha representa una causalidad unidireccional, y cuando tienen dos puntas de flecha no hay especificación de la dirección de la causalidad.

Las variables dependientes son aquellas que tienen flechas unidireccionales que apuntan hacia ellas; en tanto las variables independientes son aquellas que no poseen esta característica. En ese sentido, un modelo de ecuaciones estructurales se puede dividir en dos partes: (1) *el modelo de medición*, que es la parte que relaciona las variables indicadoras con las variables latentes, y (2) *el modelo estructural*, que vincula las variables latentes entre sí.

## **2.2 Estimación de los modelos de ecuaciones estructurales**

Bollen (1989) ha propuesto la siguiente ecuación general para representar las consecuencias fundamentales de modelar covarianzas mediante el uso de procedimientos simultáneos, como la máxima verosimilitud:

$$\Sigma = \Sigma(\theta)$$

donde  $\Sigma$  es la matriz de covarianza poblacional de las variables observadas y  $\Sigma(\theta)$  es la matriz de covarianza predicha por el modelo expresado en términos de  $\theta$ ; es decir, la matriz de los parámetros estimados del modelo. En otras palabras, esta ecuación describe la premisa fundamental de los modelos de ecuaciones estructurales, que la matriz de covarianza de la población puede ser entendido en términos de un modelo estadístico y sus parámetros.

Lo anterior significa que se compara la matriz de covarianza observada con la matriz de covarianza implícita en el modelo estadístico. Este proceso de comparación involucra una prueba general del ajuste del modelo que desempeña un papel principal en la hipótesis multivariante evaluación. Según Grace (2006), muchas de las propiedades fundamentales del SEM moderno se derivan del proceso de estimación simultánea, asociado con la estimación de máxima verosimilitud.

Ahora bien, cabe destacar que en los procesos de investigación no se conoce la matriz de covarianza de la población  $\Sigma$ , solo la matriz de covarianza observada  $S$ . Por ello, el proceso de estimación implica la comparación de la matriz de covarianza  $S$  observada con la matriz de covarianza implícita en el modelo estadístico  $\hat{\Sigma}$ <sup>1</sup>, de manera que la tarea es elegir valores para los coeficientes estructurales en  $\theta$  tal que  $S$  sea lo más similar a  $\hat{\Sigma}$  como sea posible (Grace, 2006).

El proceso de estimación de máxima verosimilitud es aquel que, por medio de procesos iterativos busca valores de parámetros que maximicen la verosimilitud que diferencia  $S$  y  $\hat{\Sigma}$ . Lograr esto implica un procedimiento de ajuste de modelos que minimiza las desviaciones entre  $S$  y  $\hat{\Sigma}$ .

La función de ajuste más utilizada en la estimación de máxima verosimilitud de los modelos de ecuaciones estructurales se basa en la razón de verosimilitud logarítmica, que compara la verosimilitud para un modelo dado con la

---

<sup>1</sup> El término  $\hat{\Sigma}$  hace referencia a  $\Sigma(\theta)$ .

verosimilitud de un modelo con ajuste perfecto. Esa función es comúnmente expresada como:

$$F_{ML} = \log|\hat{\Sigma}| + \text{tr}(S \hat{\Sigma}^{-1}) - \log|S| - (p + q)$$

donde hay  $p$  indicadores de las variables latentes endógenas y  $q$  indicadores de variables latentes exógenas (Grace, 2006).

Algunos supuestos están asociados a la expresión matemática antes planteada. Se debe asumir que las matrices  $S$  y  $\hat{\Sigma}$  son definidas positivas<sup>2</sup>, los datos siguen una distribución multinormal, y la matriz de covarianza observada se distribuye como una distribución Wishart<sup>3</sup>. Sumado a eso, los estimadores de máxima verosimilitud, tales como  $F_{ML}$ , poseen propiedades tales como que son asintóticamente imparciales (es decir, son imparciales en muestras grandes), son invariantes de escala y conducen a mejores estimaciones de los coeficientes estructurales (Grace, 2006).

Desde la mitad de los años sesenta, la estimación máxima verosímil ha sido predominante como método de estimación. En resumen, en el contexto de los modelos estructurales, el objetivo de este método de estimación es reproducir la matriz de varianzas y covarianzas a partir de las variables observadas por medio de los parámetros del modelo (Mulaik, 2009).

El método de máxima verosimilitud tiene la ventaja de que produce estimaciones que son asintóticamente eficientes y consistentes. Además, con grandes muestras dicha estimación es robusta ante la violación leve del supuesto de que los errores se comporten normalmente (Hox, 2010).

En contraste, en el caso de los modelos de ecuaciones estructurales, poseen la desventaja de que pueden estimar parámetros inadecuados que tienen varianzas

---

<sup>2</sup> Eso quiere decir que no tienen un determinante singular, como podría surgir de un estimación de varianza negativa, una correlación implícita mayor que 1.0, o la presencia de una fila de la matriz que es una función lineal de otra.

<sup>3</sup> La matriz de covarianza observada se distribuye como una Wishart pues esta define la probabilidad esperada cuando se toma el muestreo de una población normal multivariada.

negativas y coeficientes estandarizados mayores a uno; además, también puede dar problemas de convergencia (Crisci, 2012; Mulaik, 2009).

Ahora bien, es posible expresar las matrices de covarianza implícitas en una amplia variedad de modelos de ecuaciones estructurales, utilizando el lenguaje de LISREL. Keesling (1972), Jöreskog (1973) y Wiley (1973) casi simultáneamente desarrollaron el modelo LISREL (*linear structural relationships*). Cabe destacar que su notación se ha convertido en el estándar para expresar modelos de ecuaciones estructurales.

LISREL está basado en tres ecuaciones matriciales. La primera es la ecuación que describe las relaciones entre variables latentes, el cual se conoce también como el modelo estructural o modelo de variable latente:

$$\eta = B\eta + \Gamma\xi + \zeta$$

Esta ecuación está compuesta por (1) tres vectores de variables, (2) dos matrices de coeficientes y (3) dos matrices de covarianzas. Los tres vectores de variables son:

$\eta$ , un vector  $m \times 1$  de variables endógenas latentes

$\xi$ , un vector  $n \times 1$  de variables exógenas latentes, y

$\zeta$ , un vector  $m \times 1$  de errores latentes para las variables endógenas latentes,

donde  $m$  es el número de variables endógenas latentes y  $n$  es el número de variables exógenas. En ese sentido, se puede señalar que las variables endógenas son variables dependientes y, por tanto, las variables exógenas son las variables independientes.

Las dos matrices de coeficientes en la ecuación de LISREL son

$B$ , una matriz  $m \times m$  de coeficientes estructurales que describen las relaciones entre las variables endógenas latentes, y

$\Gamma$ , una matriz  $m \times n$  de coeficientes estructurales que describen los efectos de las variables exógenas en las variables endógenas.

Las matrices de covarianzas son

$\Phi$ , una matriz  $n \times n$  de covarianzas entre las variables latentes exógenas, y

$\Psi$ , una matriz  $m \times m$  de covarianzas entre los errores de las variables latentes.

Las otras dos ecuaciones que componen el modelo LISREL para representar el modelo de medición, las relaciones entre variables latentes y variables observadas se encargan de describir cómo las variables exógenas y endógenas latentes son medidas.

$$x = \Lambda_x \xi + \delta$$

$$y = \Lambda_y \eta + \varepsilon$$

Estas ecuaciones incluyen cuatro vectores de variables

$x$ , un vector  $q \times 1$  de las variables indicadores de las variables latentes exógenas contenidas en  $\xi$ ,

$y$ , un vector  $p \times 1$  de las variables indicadores de las variables latentes endógenas contenidas en  $\eta$ ,

$\delta$ , un vector  $q \times 1$  de los términos de error de medición para las variables indicadores de las variables exógenas en  $x$ , y

$\varepsilon$ , un vector  $p \times 1$  de los términos de error de medición para las variables indicadores de las variables endógenas en  $y$ .

Así como contienen también las matrices de coeficientes

$\Lambda_x$ , una matriz  $q \times n$  de coeficientes que relacionan  $x$  con  $\xi$ , el vector de las variables exógenas,

$\Lambda_y$ , una matriz  $p \times m$  de coeficientes que relacionan  $y$  con  $\eta$ , el vector de las variables endógenas,

Aunado a las dos ecuaciones anteriores, hay dos matrices asociadas al modelo de medición

$\Theta_\delta$ , una matriz  $q \times q$  de covarianzas entre los errores de medición para los indicadores de las variables exógenas latentes en  $\delta$ , y

$\Theta_\varepsilon$ , una matriz  $p \times p$  de covarianzas entre los errores de medición para los indicadores de las variables endógenas latentes en  $\varepsilon$ .

Ya definidas las ecuaciones y la notación que describe las principales partes del modelo LISREL, es posible expresar la ecuación  $\Sigma = \Sigma(\theta)$  como un conjunto de submatrices de la siguiente manera (Grace, 2006):

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \text{covarianzas entre las } \mathbf{y} & \text{covarianzas entre las } \mathbf{x} \text{ y } \mathbf{y} \\ \text{covarianzas entre las } \mathbf{x} \text{ y } \mathbf{y} & \text{covarianzas entre las } \mathbf{x} \end{vmatrix}$$

donde:

$$\text{covarianzas entre las } \mathbf{x} = \Lambda_x \Phi \Lambda'_x + \Theta_\delta$$

$$\text{covarianzas entre las } \mathbf{y} = \Lambda_y [\text{covarianzas entre } \boldsymbol{\eta}] \Lambda'_y + \Theta_\varepsilon$$

Cabe destacar que  $\text{covarianzas entre } \boldsymbol{\eta} = A(\Gamma\Phi\Gamma' + \Psi)A'$  y  $A = (I - B)^{-1}$  y  $A'$  es la matriz  $A$  transpuesta. Por otra parte, la tercera submatriz es igual a

$$\text{covarianzas entre las } \mathbf{x} \text{ y } \mathbf{y} = \Lambda_x \Phi \Gamma' A' \Lambda'_y$$

la cual da los productos cruzados esperados entre las  $\mathbf{x}$  y las  $\mathbf{y}$  en términos de sus modelos de medición de las ecuaciones  $x = \Lambda_x \xi + \delta$  y  $y = \Lambda_y \eta + \varepsilon$ . Finalmente, la última submatriz de la matriz  $\Sigma$  contiene la transposición de la ecuación en la esquina inferior izquierda

$$[\text{covarianzas entre las } \mathbf{x} \text{ y } \mathbf{y}] = \Lambda_y A \Gamma \Phi \Lambda'_x$$

Uniando los diferentes elementos se obtiene como resultado la ecuación de LISREL en la forma dada por Jöreskog (Grace, 2006):

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \Lambda_y A (\Gamma \Phi \Gamma' + \Psi) A' \Lambda'_y + \Theta_\varepsilon & \Lambda_y A \Gamma \Phi \Lambda'_x \\ \Lambda_x \Phi \Gamma' A' \Lambda'_y & \Lambda_x \Phi \Lambda'_x + \Theta_\delta \end{vmatrix}$$

### 2.3 Evaluación del ajuste de los modelos estructurales

Para evaluar el ajuste de los modelos de ecuaciones estructurales existen

numerosas medidas de ajuste por analizar. A continuación se mencionarán algunas de ellas.

Según Shumacker y Lomax (2004), encontrar un modelo teórico estadísticamente significativo que también sostenga el significado sustantivo de la investigación es el objetivo principal de usar este tipo de modelos a la hora de buscar probar teorías. En ese sentido, se utilizan diversos criterios para juzgar un modelo teórico, de los cuales vamos a destacar dos en particular: (1) la magnitud y la dirección de las estimaciones de los parámetros; prestando especial atención a si un coeficiente positivo o negativo tiene sentido para la estimación del parámetro, y (2) medidas de ajuste global y de parsimonia.

En el caso de las medidas absolutas o de las medidas de ajuste global que se encargan de comparar la matriz de varianzas y covarianzas observadas versus la modelada, se pueden identificar el estadístico chi-cuadrado del modelo y la raíz del cuadrado medio de error de aproximación (RMSEA), la raíz de residuos de cuadrado medio estandarizado (SRMR) y el índice de bondad de ajuste (GFI).

El valor chi-cuadrado es una medida tradicional para evaluar el ajuste general del modelo. Dicha medida evalúa la magnitud de la discrepancia entre la matriz de covarianzas de la muestra y la ajustada. Un buen ajuste del modelo proporcionaría un resultado insignificante con un nivel de significancia de 0,05 (Barrett, citado en Hooper, Coughlan y Mullen *et al.*, 2008).

Este estadístico posee importantes limitaciones: en primer lugar, asume la normalidad multivariada y las desviaciones severas de la normalidad pueden descalificar el modelo aun cuando especifica adecuadamente (McIntosh, citado en Hooper *et al.*, 2008). En segundo lugar, es una prueba sensible al tamaño de la muestra, lo cual significa que la estadística chi-cuadrado casi siempre rechaza el modelo cuando se usan muestras grandes (Jöreskog y Sörbom, citado en Hooper *et al.*, 2008). En tercer lugar, cuando se usan muestras pequeñas, la estadística chi-cuadrado tiene una baja potencia y, debido a esto, no discrimina adecuadamente entre modelos adecuados y modelos inadecuados (Kenny y



McCoach, citado en Hooper *et al.*, 2008).

La raíz del residuo del cuadrado medio estandarizado (SRMR), es la raíz cuadrada de la diferencia entre los residuos de la matriz de covarianza de la muestra y el modelo de covarianza hipotética. El rango del RMR (raíz del residuo cuadrado medio) se calcula sobre la base de las escalas de cada indicador; por lo tanto, si un cuestionario contiene elementos con niveles variables (algunos ítems pueden variar de 1 a 5, mientras que otros van de 1 a 7), el RMR se vuelve difícil de interpretar (Kline, citado en Hooper *et al.*, 2008).

El RMR estandarizado (SRMR) resuelve este problema y, por lo tanto, es más útil en términos de interpretación. Los valores para el SRMR oscilan entre 0,0 y 1,0, con modelos bien ajustados, obteniendo valores inferiores a 0,05. Sin embargo, valores tan altos como 0,08 se consideran aceptables. Un SRMR igual a cero indica un ajuste perfecto, pero debe tenerse en cuenta que SRMR será menor cuando hay un alto número de parámetros en el modelo y en modelos basados en grandes tamaños de muestra (Hooper *et al.*, 2008). Por otro lado, el GFI indica que el modelo es aceptable cuando su valor es mayor a 0,90 (Cea, 2002).

El índice RMSEA fue propuesto inicialmente por Steiger y Lind y luego más plenamente desarrollado por Browne y Cudeck (citado en Nevitt y Gregory, 2000). Es considerado óptimo cuando sus valores son inferiores a 0,06 (Hu y Bentler, 1998). Según Hooper, Coughlan y Mullen (2008), el RMSEA nos dice cuán bien se ajustan un modelo con parámetros desconocidos, pero óptimamente elegidos a la matriz de covarianza de la población (Byrne, 1998).

Las fórmulas de dichos índices son (Rojas, 2014):

$$\chi^2 = F * N = -2(LL_0 - LL)$$

$$SRMR = \frac{2 \sum_{i=1}^{p+q} \sum_{j=1}^i \frac{(s_{ij} - \hat{\sigma}_{ij})^2}{(s_{ii}s_{jj})^2}}{(p+q)(p+q+1)}$$

$$GFI = 1 - \frac{\|S - \hat{\Sigma}\|^2}{\|S\|^2}$$

$$RMSEA = \sqrt{\max((\chi^2 - df) / (df * (N - 1)), 0)}$$

donde  $F$  es el valor final de la función de ajuste;  $N$ , es el número de sujetos observados;  $LL$ , el valor de la función de verosimilitud evaluada en la matriz de variancias estimada a partir de la solución final  $\hat{\Sigma}$ ;  $LL_0$ , el valor de la función de verosimilitud evaluada en la matriz de variancias observadas  $S$ ;  $s_{ij}$ ; la covariancia observada entre los indicadores  $j$  e  $i$  y  $\hat{s}_{ij}$ , la covariancia estimada;  $df$  son los grados de libertad, y  $p + q$  la cantidad de variables observadas en el modelo.

## **2.4 Antecedentes de investigación sobre la asimetría en la distribución de las variables indicadoras y las estimaciones dadas por máxima verosimilitud en modelos de ecuaciones estructurales**

Los análisis empíricos de datos reales de distintos campos sugieren que el supuesto de normalidad a menudo no es sostenible. De hecho, observamos densidades empíricas caracterizadas por colas pesadas, así como por grados significativos de asimetría (Bottazzi y Secchi, 2008).

De acuerdo con Montfort, Mooijaart y Meijerink (2009), los métodos de estimación empleados para el modelado de las ecuaciones estructurales (SEM) son: máxima verosimilitud (ML), máxima verosimilitud de Wishart (MWL), mínimos cuadrados generalizados (GLS), mínimos cuadrados ponderados (WLS), distribución asintótica con libre de distribución (ADF o ADF-WLS) y los mínimos cuadrados elípticos reponderados (EGLS o ELS).

La estimación máxima verosímil y la estimación máximo verosímil de Wishart suponen una distribución normal multivariada en las variables medibles u observadas (Jöreskog y Sörbom, citado en Montfort, Mooijaart y Meijerink, 2009; Crisci, 2012; Mulaik, 2009). Cuando las variables observadas no están distribuidas normalmente, los estimadores de los errores estándar y las estadísticas de ajuste de chi-cuadrado asociadas pueden ser incorrectos, dando

falsos resultados significativos (Bentler y Dudgeon, citado en Montfort, Mooijaart y Meijerink, 2009).

Es decir, la no normalidad conduce a una sobreestimación del estadístico chi-cuadrado, lo cual indica el grado de discrepancia entre las matrices de covarianza derivadas del modelo y de la muestra; esto puede entonces conducir potencialmente a un falso rechazo del modelo en su conjunto. En otras palabras, cuando se utiliza el estadístico chi-cuadrado como una medida de ajuste del modelo en condiciones de no normalidad, ello conduce a una inflación del error tipo 1. Además, se subestiman los errores estándar de las estimaciones de los parámetros y, por lo tanto, se concluyen atribuciones erróneas de significancia en las relaciones específicas del modelo (Gao, Mokhtarian y Johnson, 2008).

Tomando en cuenta lo común que es el incumplimiento del supuesto de la distribución normal multivariante en las variables medibles, se han desarrollado correcciones para ajustar las estimaciones máximo verosímiles en escenarios de no normalidad. Por ejemplo, específicamente para minimizar el sesgo en modelos de ecuaciones estructurales, se han creado la estimación por distribución asintótica con libre distribución (ADF) y las estimaciones elípticas. Sin embargo, pese a que ambos métodos de estimación se han mostrado consistentes y asintóticamente eficientes bajo una serie de condiciones, tienen una gran desventaja comparada con la estimación por máxima verosimilitud, pues requieren de una muestra de por lo menos 1000 observaciones (Montfort, Mooijaart y Meijerink, 2009), además de que es muy demandante computacionalmente y que los modelos con más de veinte variables no pueden ser estimados (Currant, West y Finch, 1996).

Otra alternativa que se puede implementar para estimar modelos estructurales cuando se poseen variables medibles que no se distribuyen normalmente, es transformarlas para que se distribuyan normalmente. La transformación de variables en los análisis de datos es bien conocida y común. Breiman y Friedman (citado en Montfort, Mooijaart y Meijerink, 2009) presentan un procedimiento para SEM que es aplicado en modelos de regresión, el cual se puede aplicar tanto

para variables categóricas como para variables ordinales. Por otro lado, Ramsay (citado en Montfort, Mooijaart y Meijerink, 2009) utiliza *splines* monótonos y polinomios por pieza para transformar las variables.

En esa misma vía, Montfort, Mooijaart y Meijerink (2009) seleccionan un modelo específico y transforman las variables observadas, de tal manera que sus medidas de bondad de ajuste se modifiquen en medidas óptimas. La transformación de las variables la llevan a cabo mediante las transformaciones de Box-Cox.

Según Gao, Mokhtarian y Johnson (2008), las transformaciones reducen la asimetría multivariada y la kurtosis de todas las variables, reduciendo la asimetría univariada y la kurtosis de cada variable individual. Cuando la no normalidad univariada es *severa*, la transformación reducirá sustancialmente la asimetría univariada y la kurtosis; y cuando la no normalidad univariada es *moderada o leve*, la transformación tiene solo un efecto menor. Sin embargo, estos autores señalan que una *ligera* tendencia a la no normalidad de las variables individuales puede conducir a una gran kurtosis o asimetría multivariada. Por lo tanto, es poco probable que la transformación conduzca a una distribución normal multivariada.

Por otro lado, Gao, Mokhtarian y Johnson (2008) señalan que las transformaciones asumen que las relaciones de una variable con otras son curvilíneas en lugar de lineales y que, en ocasiones, esta suposición puede no ser cierta. En ese sentido, es posible que cuando se utilizan transformaciones la teoría que respalda su modelo de ecuaciones estructurales se degrade en términos de índices de ajuste de modelo o, peor aún, que el modelo no sea identificable empíricamente. En este caso, incluso si la transformación mejora la normalidad *per se*, no es útil para mejorar el modelo en su conjunto. Además, la curvilineidad hace más difícil la interpretación de los coeficientes. Por lo tanto, el papel de la transformación debería evaluarse caso por caso, y concluir si es adecuado o no.

Gao, Mokhtarian y Johnson (2008), tomando en cuenta la desventaja que plantean sobre la transformación de datos, se posicionan a favor de la eliminación de valores extremos para aproximarse más a la distribución normal y evitar la distorsión de la matriz de covarianza, causada por el incumplimiento del supuesto de normalidad.

Dichos autores argumentan que la supresión de valores atípicos se centra en reducir la asimetría multivariada y la kurtosis de los datos observados. La supresión de un valor extremo disminuirá la kurtosis multivariable; por tanto, los valores atípicos pueden ser eliminados hasta que el índice de kurtosis multivariante alcance el nivel deseado. Una ventaja de eliminar los valores atípicos sobre la transformación de los datos para lograr la normalidad es que conserva la suposición de linealidad (Gao, Mokhtarian y Johnson, 2008). Ahora bien, esta estrategia para abordar la no normalidad posee dos desventajas: (1) la pérdida de observaciones y, por tanto, pérdida de información y poder del modelo, (2) la manipulación de la realidad del fenómeno de estudio, pues, si los valores extremos forman parte de la realidad en estudio que se está modelando, se está realizando una manipulación al omitir valores posibles de esta, con el fin de mejorar la calidad del modelo.

Con la discusión elaborada hasta acá, lo que se visibiliza es que la transformación de las variables en los modelos de ecuaciones estructurales no es lo más prudentes para solucionar el problema del incumplimiento del supuesto de normalidad requerido para el uso del método de estimación por máxima verosimilitud. En ese sentido, hay investigaciones científicas que se han planteado estudiar cuáles son los efectos de la presencia de distribuciones no normales en las variables observadas, dado que la transformación de los datos no parece ser la salida al problema planteado.

Para abordar ese problema, Muthén y Kaplan (1985) diseñaron cinco combinaciones de asimetría y kurtosis en las variables indicadoras con un solo tamaño de muestra igual a 1000, para estudiar los efectos de la no normalidad en las estadísticas de chi-cuadrado y las estimaciones de parámetros de un

análisis factorial con cuatro variables Likert. Estas combinaciones se presentan en la tabla 1.

Tabla 1 Casos de estudio de Muthén y Kaplan

<b>Casos</b>	<b>Asimetría</b>	<b>Kurtosis</b>
Caso 1	0,08	0,00
Caso 2	1,80	0,62
Caso 3	5,63	6,65
Caso 4	14,42	21,41
Caso 5	0,13	13,92

**Fuente:** Muthén y Kaplan (1985).

Los hallazgos de esta investigación fueron que el estadístico chi-cuadrado y las frecuencias de rechazo del modelo para el modelo en el caso 4 fueron 84% y 67% superiores, que en el caso 1. Los efectos de la no normalidad en el estadístico chi-cuadrado y las frecuencias de rechazo del modelo en el caso 2, 3 y el caso 5 eran insignificantes. En todos los casos, las diferencias entre los parámetros estimados y los parámetros reales no superaron el 4,2% y fueron insignificantes.

Por tanto, Muthén y Kaplan (1985) concluyeron que si la mayoría de las variables tienen asimetrías univariadas y kurtosis en el rango de -1,0 a 1,0, no se espera mucha distorsión y que esto es, en gran parte, independiente del número de variables y el número de categorías, y cuando la asimetría y kurtosis son más grandes 2,0 en valor absoluto y las correlaciones son grandes (0,5 y más alto), las distorsiones de la estimación máximo verosímil y la estimación por mínimos cuadrados generalizados en los estadísticos chi-cuadrado y errores estándar son muy probables.

Por otra parte, Hallow (citado en Gao, Mokhtarian y Johnson, 2008) probó los impactos de la no normalidad, mediante asimetría univariada entre -1,25 y 2,0 y kurtosis entre -1,0 y 8,0, y la kurtosis de Mardia entre -4,9 y 49,1. Los resultados mostraron que los estadísticos chi-cuadrado no se inflaron significativamente por la no normalidad y que los resultados no diferían mucho entre los modelos que no cumplían la normalidad y los que sí la cumplían. Sin embargo, se encontró

que al menos un error estándar en la estimación de parámetros bajo la condición de no normalidad tenía un sesgo negativo o positivo.

Satorra y Bentler (1988) realizaron una simulación de Monte Carlo usando un modelo de cuatro variables indicadoras para un factor, para evaluar el comportamiento del estadístico de la prueba Satorra-Bentler<sup>4</sup>. Los cuatro indicadores se calcularon con una asimetría de 0 y una kurtosis de 3,7. Los modelos se calcularon utilizando máxima verosimilitud y mínimos cuadrados no ponderados y ADF, con mil repeticiones para un único tamaño de muestra de 300. En los resultados se pudo observar que tanto la prueba chi-cuadrado, basada en la teoría normal como la prueba SB se portaron de manera similar; en promedio, la prueba chi-cuadrado subestimó ligeramente el valor esperado del modelo, mientras que la prueba SB sobrestimó ligeramente el valor esperado. Sin embargo, la primera de ellas tuvo una varianza mayor que la segunda.

Por otro lado, Chou, Bentler y Satorra (1991) utilizaron similarmente una simulación de Monte Carlo para examinar las estadísticas de la prueba chi-cuadrado y la prueba SB en la estimación máximo verosímil y ADF para un modelo especificado bajo condiciones de normalidad en las variables indicadoras. Para esto, usaron un modelo análisis factorial confirmatorio con seis variables indicadoras y dos factores, donde se hicieron 100 “réplicas” de las estimaciones para dos tamaños de muestra (200 y 400) y seis distribuciones multivariadas. De acuerdo con esta investigación, el estadístico chi-cuadrado se infló bajo condiciones no normales, mientras que el chi-cuadrado con la corrección de SB tuvo buenas estimaciones en casi todas las condiciones.

Hu, Bentler y Kano (1992) realizaron un estudio de simulación basado en un modelo de análisis factorial confirmatorio de tres factores con cinco variables

---

<sup>4</sup> La prueba Satorra-Bentler es una variante de la estadística chi-cuadrado. Con ella se realiza una corrección a la prueba chi-cuadrado que supone normalidad, pues ésta es reescalada por una constante  $k$ , que es un valor escalar que es una función de la matriz de peso residual implícita del modelo, la kurtosis multivariada observada y los grados de libertad modelo. Cuanto mayor es el grado de kurtosis multivariante observado, mayor es el ajuste hacia abajo que se hace al estadístico chi-cuadrado, que está siendo sobrestimado (Satorra y Bentler, 1988).

indicadoras por factor. Utilizaron seis tamaños de muestra (de 150 a 5000) con 200 repeticiones por cada escenario; se consideraron siete diferentes distribuciones, que van desde distribuciones normales hasta distribuciones con kurtosis altas. En las estimaciones realizadas, utilizando máxima verosimilitud y mínimos cuadrados generalizados, los valores chi-cuadrado se inflaron a medida que aumentaba la no normalidad, mientras que la prueba para la estimación ADF fue relativamente poco afectada por la distribución, pero solo fue confiable para el tamaño de muestra más grande. Finalmente, el estadístico chi-cuadrado de Satorra-Bentler tuvo un mejor desempeño, pero los modelos fueron rechazados más rápidamente de lo que esperaban los autores con tamaños de muestra pequeños.

De acuerdo con Curran, West y Finch (1996), hay dos clases de supuestos que subyacen a los métodos estadísticos utilizados para estimar los modelos de análisis factorial confirmatorio: de distribución y de estructura. De hecho, las investigaciones citadas previamente se dedican a estudiar principalmente los efectos en la estimación de máxima verosimilitud ante el incumplimiento del supuesto distributivo de que las variables medidas tienen una distribución normal multivariada.

Por otro lado, todos los métodos de estimación tienen supuestos de que la estructura probada en la muestra (estructura que se basa en la teoría sustantiva, que configura las relaciones planteadas en el modelo) pretende reflejar con precisión una estructura relacional que existe en la población. Ahora, es importante destacar que, si la estructura de la muestra no se ajusta adecuadamente a la estructura de la población correspondiente, ello puede producir distorsiones en las estimaciones que se realizan con el modelo relacional construido (Curran, West y Finch, 1996).

En ese sentido, Currant, West y Finch (1996) comentan que la violación de los supuestos distributivos en análisis factorial confirmatorio es cada vez mejor entendido; sin embargo, se sabe menos sobre las violaciones de la suposición estructural de los modelos. Al mismo tiempo, ellos destacan que poco se sabe



sobre el comportamiento de las estadísticas de la prueba del chi-cuadrado bajo violaciones simultáneas de los supuestos distributivos y estructurales.

Es decir, es necesario realizar un análisis que determine los efectos del incumplimiento del supuesto de normalidad multivariante entrelazado con el análisis del cumplimiento (o el incumplimiento) de la estructura teórica propuesta. Ello implica entonces evaluar si la teoría que fundamenta el modelo planteado que se estima mediante las observaciones substraídas de la muestra, no pierde su validez empírica con la presencia de asimetría en las variables medibles. Ello permitiría concluir si la asimetría en las variables indicadoras afecta el supuesto de las relaciones estructurales (y los parámetros asociados) que se ha planteado antes de estimar el modelo.

Finalmente, cabe destacar que el punto central de la discusión de la presencia de asimetría en las variables medibles o bien la falta de normalidad en estas no es lo más importante, sino hasta qué punto las estimaciones del modelo son confiables cuando los datos poseen una distribución multivariante no normal. Dicho de otra forma, se desea tener evidencia que permita comprender qué nivel de no normalidad multivariable en las variables medibles de la variable endógena del modelo es aceptable para obtener una estimación útil a nivel práctico (por tanto, con un sesgo tolerable) de los estadísticos que evalúan la relación entre los *constructos*, las cargas factoriales y las medidas de bondad de ajuste.

Además, lo que Muthén y Kaplan (1985), Satorra y Bentler (1988), Hu, Bentler y Kano (1992), Chou, Bentler y Satorra (1991), Gao, Mokhtarian y Johnson (2008), omiten en sus investigaciones es que, dado que sus modelos de simulación no poseen coeficientes que representen relaciones entre *constructos*, no hay hallazgos que refieran a los sesgos de estos ante el incumplimiento del supuesto de multinormalidad.

En otras palabras, los modelos que ellos utilizan no contienen parámetros entre variables latentes; por lo tanto, no hacen un aporte sobre el efecto de la asimetría en las variables observadas en la estimación de estos cuando se usa el método

de estimación de la máxima verosimilitud, elemento que sí se aborda en esta investigación mediante el modelo de simulación planteado en el siguiente capítulo.

### 3. ABORDAJE METODOLÓGICO

#### 3.1 Diseño de simulación para el estudio del efecto de la asimetría positiva en un modelo de ecuaciones estructurales con una variable endógena y dos exógenas

El aporte metodológico-estadístico de esta investigación tiene que ver con el estudio del comportamiento de modelos estructurales ante la asimetría positiva de las variables indicadoras en un modelo con una variable endógena y dos variables exógenas. La incorporación de una variable endógena a los estudios de los efectos de la asimetría en SEM es el elemento novedoso de la presente pesquisa.

A partir del cumplimiento de este objetivo se generan evidencias de los efectos de la asimetría positiva en los coeficientes de un modelo de ecuaciones estructurales y en el ajuste de un modelo de ecuaciones estructurales con una variable dependiente para diferentes tamaños de muestra.

En el marco teórico se retoma el aporte de Curran, West y Finch (1996), quienes argumentan que hay dos clases de supuestos que subyacen a los métodos estadísticos utilizados para estimar los modelos de análisis factorial confirmatorio: de distribución y de estructura.

El primer supuesto al que se refieren estos autores está relacionado con la distribución normal multivariada en las variables medibles u observadas. El segundo supuesto está vinculado con que la teoría sustantiva que respalda el modelo estructural se refleje en la matriz de covarianzas establecida y, por tanto, se ajuste adecuadamente a la estructura de la muestra.

De acuerdo con estos autores, la academia se ha dedicado bastante a estudiar las consecuencias del incumplimiento del primer supuesto, principalmente a estudiar los efectos de la distribución de las variables medidas<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup> Usualmente en casos de la no presencia de distribución normal multivariada.

en el estadístico chi-cuadrado (Currant, West y Finch, 1996), tal como lo muestran los antecedentes ya estudiados.

Ellos han afirmado que la violación de los supuestos distributivos en análisis factorial confirmatorio ha sido estudiada en distintas ocasiones, pero que se sabe menos sobre las violaciones de la suposición estructural de los modelos. Al mismo tiempo, afirman que se sabe poco sobre el comportamiento de las estadísticas de la prueba del chi-cuadrado bajo violaciones simultáneas de los supuestos distributivos y estructurales (Currant, West y Finch, 1996).

En otras palabras, se ha generado poco conocimiento sobre el efecto de la asimetría en el ajuste y en la magnitud de los coeficientes, simultáneamente. Por todo eso, el análisis que se realiza se ocupa de estudiar lo que sucede con los coeficientes del modelo estructural (supuesto de estructura) cuando el supuesto distributivo no se cumple.

Es relevante mencionar que el objetivo fundamental de un modelo de ecuaciones estructurales es comprobar si hay altas o bajas correlaciones entre constructos, según una propuesta teórica elaborada previamente –propuesta teórica que establece la especificación del modelo—. De manera que el planteamiento de Currant, West y Finch (1996) pretende cuestionar qué sucede con esas correlaciones entre variables latentes cuando no hay normalidad multivariada en las variables medibles utilizadas.

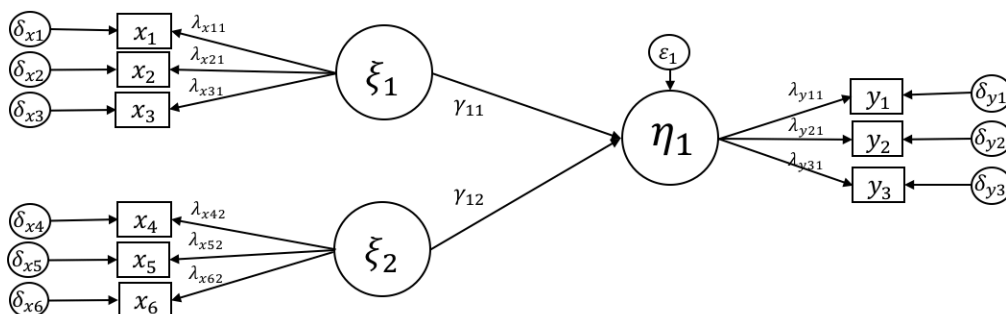
Dicho de otra forma, hace falta investigación que permita concluir si se conserva la evidencia empírica que respalda la teoría que inicialmente justificó las relaciones entre *constructos* en el modelo SEM, cuando no se cumple con el supuesto distributivo de normalidad.

Concretamente, se pretende analizar cómo ante escenarios de asimetría en las variables indicadoras se afecta la suposición del comportamiento de la matriz de varianzas y covarianzas, lo cual tiene efecto en el comportamiento de los parámetros estimados en el modelo.

El análisis que se propone plantea determinar los efectos del incumplimiento del supuesto de normalidad multivariante en el ajuste del modelo, dada la presencia de una distribución asimétrica positiva en las variables indicadoras de una variable endógena<sup>6</sup>. Ello, con el fin de brindar a la comunidad estadística nociones concretas de las implicaciones con respecto a violentar el supuesto de normalidad de las variables indicadoras de la variable endógena y sus consecuencias en el modelo, mediante simulaciones.

### 3.2 El modelo de simulación

El modelo de simulación propuesto es un modelo de ecuaciones estructurales con una variable endógena y dos exógenas. Cabe destacar que en este modelo de simulación cada variable latente tiene tres variables indicadoras, tal como lo recomienda Little (2013). A continuación se presenta el modelo de simulación:



Para realizar la simulación es necesario fijar algunos parámetros. El modelo planteado es un análisis factorial confirmatorio con coeficientes estandarizados con una variable endógena con dos variables exógenas, donde las varianzas de las variables latentes son iguales 1, las cargas factoriales son 0,7, las varianzas residuales de los indicadores son 0,51, y las covarianzas de las variables latentes exógenas a 0,5. Al mismo tiempo, los coeficientes de regresión son iguales a 0,5

<sup>6</sup> Es decir, en  $\gamma_i$  y en  $\lambda_i$  del modelo de simulación que se presenta en la siguiente sección.

y la covarianza de la variable endógena se fijó en 0,25<sup>7</sup>. A continuación se presentan las matrices correspondientes para definir  $\Sigma$  en dicho modelo:

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_5 \\ 0 & \lambda_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 \\ 0,7 & 0 \\ 0,7 & 0 \\ 0 & 0,7 \\ 0 & 0,7 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,7 \\ 0,7 \end{pmatrix}$$

$$\Theta_\delta = \begin{pmatrix} 0,51 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,51 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,51 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,51 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,51 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,51 \end{pmatrix}$$

$$\Theta_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0,51 & 0 & 0 \\ 0 & 0,51 & 0 \\ 0 & 0 & 0,51 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \Psi = (0,25)$$

---

<sup>7</sup> De acuerdo con Rojas (2014), “la varianza de las variables latentes define la métrica de los constructos; los valores de las cargas factoriales, indican que las variables observadas son importantes dentro de cada constructo; la varianza residual señala que la varianza total de los indicadores equivale a 1 (la varianza total es igual a la varianza residual más el cuadrado de la carga factorial) por lo que son variables estandarizadas y, finalmente, el valor de las covarianzas indica que las correlaciones entre las variables latentes son de tamaño medio” (p. 92).

Por otro lado, los coeficientes de regresión de igual manera se fijaron como correlaciones de tamaño medio, y la covarianza de la variable endógena se obtuvo al despejar  $\Psi$  de la fórmula  $cov(\eta) = \Gamma\Phi\Gamma' + \Psi$ , donde  $cov(\eta) = 1$  y los coeficientes de regresión en  $\Gamma$  son iguales a 0,5.

### 3.3 Escenarios para la simulación

A la hora de realizar un estudio de simulación, es necesario fijar un escenario base con el cual se van a comparar los resultados de todos los escenarios restantes que tienen diversas condiciones de simulación a la luz de la delimitación del análisis propuesto. Al mismo tiempo, se deben establecer cuáles son esas condiciones que va a determinar la particularidad de cada uno de los escenarios de la simulación.

En esta propuesta de investigación se proponen tres elementos que varían según cada escenario de simulación: el grado de asimetría en las variables medibles de la variable endógena<sup>8</sup>, la cantidad de variables medibles asimétricas (solo  $y_1$ , sólo  $y_1$  e  $y_2$ , o  $y_1, y_2$  e  $y_3$ ) y el tamaño de muestra.

Debido a lo anterior, para cada tamaño de muestra se genera un modelo en el cual las tres variables indicadoras de la variable endógena se comportan normalmente; es decir, poseen una asimetría igual a 0. Por tanto, hay un escenario control para las simulaciones con 100 observaciones y otro escenario control para las simulaciones con 200 observaciones en la muestra. Cada uno de esos modelos control se compara con los escenarios de simulación (9 combinaciones) correspondientes para cada tamaño de muestra.

En el caso del grado de asimetría de las variables indicadoras, la variación corresponde a tres escenarios de la simulación, los cuales son presentados en la Tabla 2. El caso 1, que también se denomina escenario base o la simulación base, tiene asimetría 0. Ese es el escenario de simulación en el cual el modelo cuenta con variables indicadoras que poseen una distribución normal multivariada; es decir, es el escenario ideal del comportamiento de las variables medibles. Este escenario es fundamental para la simulación, pues, basado en los valores de los parámetros que se estimen a partir de él, se pueden sacar

---

<sup>8</sup> Esto quiere decir, que las restantes variables indicadoras de las variables exógenas se van a distribuir normalmente en todos los escenarios de simulación.

conclusiones sobre la medida en que los parámetros estimados se sesgan con los modelos con asimetría en las parcelas en los diversos escenarios.

El escenario 2 usa una asimetría de 0,70. El escenario 3 tiene una unidad de asimetría más que el escenario 2, y el escenario 4 tiene una unidad de asimetría más que el escenario 3.

Tabla 2 Escenarios de simulación por nivel de asimetría en las variables indicadoras de la variable endógena

<b>Escenarios de simulación</b>	<b>Valores de asimetría en las variables indicadoras de las variables endógenas</b>
<b>ESCENARIO BASE 1</b>	0,00
<b>2</b>	0,70
<b>3</b>	1,70
<b>4</b>	2,70

**Fuente:** Elaboración propia.

Por otro lado, se emplean dos tamaños de muestra para el análisis: 100 observaciones y 200 observaciones utilizando los criterios de Ruiz, Pardo y San Martín (2010), Hoe (2008), Sivo *et al.* (2006), Garver and Mentzer (1999) y Hoelter (1983). Dichos autores coinciden en el hecho de que se sugiere exigir tamaños de muestra superiores a las 100 observaciones, y se considera que muestras iguales o mayores a 200 observaciones son adecuadas para el ajuste de modelos SEM, pues proveen la suficiente potencia estadística para el análisis de datos.

Finalmente, la cantidad de variables medibles asimétricas se introducen como otra condición variante en los escenarios de simulación, pues es común que en la práctica solo una o dos de las variables indicadoras cumplan con el supuesto de normalidad. Por lo anterior, es de interés analizar si a mayor cantidad de variables observadas asimétricas, se obtienen estimaciones con mayor probabilidad de sesgos y, por lo tanto, esto lleva a que el ajuste del modelo sea más pobre.



En la siguiente ilustración se muestran todas las combinaciones posibles entre las tres condiciones de simulación, explicitando así los 18 escenarios de simulación que se llevan a cabo, además de las simulaciones en el escenario de cero asimetría para cada tamaño de muestra. Para cada escenario de simulación se plantea generar 500 iteraciones.

Cuadro 1 Escenarios de simulación según las variaciones en las condiciones de simulación: nivel de asimetría, cantidad de variables asimétricas y tamaños de muestra.

Tamaños de muestra	Nivel de asimetría			Variables medibles asimétricas de la variable endógena
	0,70	1,70	2,70	
100	1	2	3	$y_1$
	4	5	6	$y_1, y_2$
	7	8	9	$y_1, y_2, y_3$
200	10	11	12	$y_1$
	13	14	15	$y_1, y_2$
	16	17	18	$y_1, y_2, y_3$

### 3.4 La generación de asimetría en las variables indicadoras

Para generar las matrices de datos que requiere cada escenario de simulación, se utiliza la función *simulateData* del paquete de R *lavaan* versión 0.6-3, que se basa en la propuesta de Vale y Maurelli (1983). Dichas matrices están constituidas por las seis indicadoras correspondientes las variables exógenas (con un nivel de asimetría igual a cero), y las tres indicadoras de la variable endógena (cuyos valores de asimetría varían según las condiciones de la simulación). Con esta función los datos son simulados según la asimetría indicada para cada una de las variables observadas, cumpliendo a la vez con la estructura planteada para el modelo de simulación (sección 3.2).

Fleishman (1978) señala que las distribuciones de variables son típicamente caracterizadas por sus primeros cuatro momentos: la media, varianza, asimetría

y kurtosis, de manera que presenta un procedimiento para generar números aleatorios no normales con estos momentos especificados.

El procedimiento de Fleishman (1978) tiene una ventaja sobre los otros procedimientos para generar números aleatorios no normales y es que se puede extender fácilmente para generar números aleatorios multivariados, con intercorrelaciones específicas y medias, varianzas, asimetrías (también llamado sesgo) y kurtosis univariadas. El artículo de Vale y Maurelli (1983) presenta los detalles de una propuesta de extensión de dicho procedimiento y evalúan la extensión por medio de un ejemplo.

En la técnica de Fleishman (1978), para generar números aleatorios no normales en el caso univariante, se define una variable  $Y$  como una combinación lineal de las tres primeras potencias de una variable aleatoria normal estándar  $X$ , de la siguiente manera:

$$Y = a + bX + cX^2 + dX^3$$

Las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  se eligen para proporcionar a  $Y$  una distribución con una forma específica. Para determinar las constantes, Fleishman amplía la ecuación anterior para expresar los primeros cuatro momentos de  $Y$  en términos de los primeros catorce momentos de  $X$ . Dado que  $X$  se distribuye normalmente, los primeros catorce momentos son constantes conocidas, de manera que Fleishman representa la solución a las constantes como un sistema de ecuaciones no lineales. Para una distribución normal estándar, las constantes  $b$ ,  $c$  y  $d$  se encuentran resolviendo simultáneamente las siguientes ecuaciones:

$$b^2 + 6bd + 2c^2 + 15d^2 - 1 = 0$$

$$2c(b^2 + 24bd + 105d^2 + 2) - \omega_1 = 0$$

$$25[bd + c^2(1 + b^2 + 28bd) + d^2(12 + 48bd + 141c^2 + 225d^2)] - \omega_2 = 0$$

donde  $\omega_1$  es la asimetría deseada y  $\omega_2$  la kurtosis deseada y la constante  $a = -c$ .

Finalmente, la distribución univariada de números aleatorios se obtiene generando números aleatorios normales y transformándolos usando las

constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  en la combinación lineal que da origen a  $Y$  (Fleishman, 1978).

La propuesta de Vale y Maurelli (1983) consiste en generar números aleatorios multivariados no normales usando una combinación del procedimiento de descomposición de la matriz de Kaiser y Dickman (1962) y el método de Fleishman (1978). Específicamente, Vale y Maurelli (1983) generan números aleatorios normales multivariados con intercorrelaciones específicas que de manera posterior se transforman individualmente a las formas deseadas en la distribución. En ese proceso, los dos procesos de Kaiser y Dickman y Fleishman interactúan y los números no-normales tienen intercorrelaciones diferentes de las normales. Para generar números aleatorios con intercorrelaciones y momentos específicos, se debe anticipar y contrarrestar el efecto de la no normalización en las correlaciones.

En el procedimiento descrito a continuación se determina una matriz de correlación intermedia apropiada, a partir de la matriz deseada y las transformaciones no normales. Cuando se generan números aleatorios normales multivariados con la matriz de correlación intermedia no normalizadas, las variables no normales resultantes tienen las intercorrelaciones y los momentos deseados de la población (Vale y Maurelli, 1983).

En la propuesta de Vale y Maurelli (1983) el procedimiento comienza con la especificación de las constantes necesarias para que el procedimiento de Fleishman convierta las variables normales estándar en variables no normales. Para cada variable de forma independiente, estas están dadas por la solución de las últimas cuatro ecuaciones expuestas anteriormente en esta sección.

El cálculo de las variables no normales se puede formular en notación de matriz, como se muestra a continuación. Primero se definen dos variables  $X_1$  y  $X_2$  como variables extraídas de poblaciones normales estándar, donde el vector  $X$  se define como:

$$x' = [1, X, X^2, X^3].$$

El vector de pesos  $w$  contiene los pesos de la función de potencia  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ :

$$w' = [a, b, c, d].$$

La variable no normal  $Y$  es entonces definida como el producto de estos dos vectores:

$$Y = w'x.$$

En este caso  $r_{Y_1Y_2}$  es la correlación entre las dos variables no normales  $Y_1$  y  $Y_2$  correspondientes a las variables normales  $X_1$  y  $X_2$ . Cabe destacar que, dado que las variables están estandarizadas, la correlación entre  $Y_1$  y  $Y_2$  es igual a su producto cruzado esperado.

$$r_{Y_1Y_2} = E(Y_1Y_2)$$

$$r_{Y_1Y_2} = E(w_1'x_1x_2'w_2)$$

$$r_{Y_1Y_2} = w_1'Rw_2$$

donde  $R$  es el valor esperado de producto de  $x_1$  y  $x_2$ :

$$R = E(x_1x_2') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho_{X_1X_2} & 0 & 3\rho_{X_1X_2} \\ 1 & 0 & 2\rho_{X_1X_2}^2 + 1 & 0 \\ 0 & 3\rho_{X_1X_2} & 0 & 6\rho_{X_1X_2}^3 + 9\rho_{X_1X_2} \end{bmatrix}$$

Ahora bien, volviendo al álgebra escalar, recopilando términos, y usando la relación entre  $a$  y  $c$ , un polinomio de tercer grado en  $\rho_{X_1X_2}$ , la correlación entre las variables normales  $X_1$  y  $X_2$ , se obtiene que:

$$r_{Y_1Y_2} = \rho_{X_1X_2}(b_1b_2 + 3b_1d_2 + 3b_2d_1 + 9d_1d_2) + \rho_{X_1X_2}^2(2c_1c_2) + \rho_{X_1X_2}^3(6d_1d_2).$$

Al solucionar este polinomio, para  $\rho_{X_1X_2}$  se proporciona la correlación intermedia entre las dos variables  $X_1$  y  $X_2$  requeridas para proporcionar la correlación de postransformación deseada  $r_{Y_1Y_2}$ . Por tanto, estas correlaciones se pueden ensamblar en una matriz de intercorrelaciones, y esta matriz se puede descomponer para producir números aleatorios multivariados normales para la entrada al procedimiento de transformación de Fleishman (Vale y Maurelli, 1983).

En este punto es importante señalar que con la propuesta metodológica esbozada para responder la pregunta de investigación, se propone un estudio basado en simulaciones, donde se generan datos con la estructura del modelo planteado. Cada una de las matrices de datos producidas para cada iteración ha sido revisada para asegurar que, en efecto, cumpla con los supuestos de simulación. En ese sentido, se puede afirmar que los datos empleados para las simulaciones son muestreadas para asegurar el cumplimiento de las condiciones del estudio planteado. Con lo anterior se busca que los sesgos de muestreo se asemejen a los obtenidos en la investigación aplicada.

### **3.5 Medidas de bondad de ajuste y coeficientes**

Para el análisis final de la simulación, se comparan los cambios en el estadístico chi-cuadrado, el RMSEA, el GFI, las cargas factoriales para las variables endógenas y los parámetros estructurales entre las variables endógenas y exógenas. Esto se realiza con el fin de concluir sobre los efectos del incumplimiento del supuesto de distribución y de estructura, específicamente midiendo cuál es el sesgo entre las estimaciones realizadas con asimetría y el modelo ideal que cumple el supuesto de normalidad multivariada en todas sus variables observadas. Se espera entonces que, ante mayor asimetría más imprecisas sean las estimaciones de los parámetros del modelo y, por tanto, los indicadores de bondad de ajuste empeoren.

Para realizar el análisis de los resultados, se generan histogramas de cada estadístico a partir de sus respectivas distribuciones obtenidas de las quinientas réplicas de cada uno de los dieciocho escenarios de simulación. Para sacar conclusiones sobre el comportamiento del modelo de simulación planteado ante la variación de las tres condiciones determinadas (tamaño de muestra, magnitud de la asimetría positiva y número de parcelas asimétricas en la variable endógena), se brindan estadísticos descriptivos e histogramas de las distribuciones de los coeficientes de interés.

Estas son las herramientas que permiten discutir la robustez y limitación de los modelos de ecuaciones estructurales ante la naturaleza asimétrica positiva de las parcelas de la variable endógena del modelo de simulación. Asimismo, estas permiten realizar recomendaciones sobre cómo proceder ante el incumplimiento del supuesto de normalidad multivariada en las variables indicadoras de la variable endógena cuando se realiza la estimación por máxima verosimilitud.

## 4. RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES

Este capítulo se enfoca en la presentación de los resultados obtenidos del estudio de simulación propuesto para identificar los efectos de la presencia de asimetría positiva en las variables medibles de la variable endógena en los coeficientes del modelo estructural (coeficientes de regresión), así como en las cargas factoriales y en los estadísticos de bondad de ajuste; todo, en el contexto de un modelo con una variable endógena y dos exógenas cuyos coeficientes están estandarizados.

Como se definió en el abordaje metodológico, se ha determinado un “escenario control” (también llamado escenario base) de simulación para cada tamaño de muestra en estudio. Este escenario consiste en la simulación de réplicas bajo un modelo que cumple con el supuesto de distribución multinormal en las variables indicadoras de todas las variables latentes (supuesto establecido cuando se emplea estimación por máxima verosimilitud).

En otras palabras, para los nueve escenarios de simulación correspondientes a cada uno de los dos tamaños de muestra (100 y 200), hay un escenario control con el cual se comparan los resultados obtenidos en cada una de las variaciones planteadas en las simulaciones (ver Cuadro 1).

El desarrollo de este capítulo está dividido en cinco secciones. En la primera de ellas se estudian los resultados de las simulaciones con respecto a las cargas factoriales ( $\lambda_{x_{11}}$ ,  $\lambda_{x_{21}}$ ,  $\lambda_{x_{31}}$ ,  $\lambda_{x_{42}}$ ,  $\lambda_{x_{52}}$ ,  $\lambda_{x_{62}}$  y  $\lambda_{y_{11}}$ ,  $\lambda_{y_{21}}$ ,  $\lambda_{y_{31}}$ ). En la segunda etapa se estudian los resultados obtenidos para los coeficientes del modelo estructural ( $\gamma_{11}$  y  $\gamma_{12}$ ). En la tercera etapa se presentan los hallazgos relacionados con los estadísticos de bondad de ajuste de los modelos (RMSEA, SRMR, GFI y chi-cuadrado). Finalmente, en la cuarta sección se brindan las conclusiones obtenidas de las simulaciones.

En las secciones de los resultados de las simulaciones se muestran para ambos tamaños de muestra propuestos: la media, la desviación estándar y los

percentiles 2,5 y 97,5 de las distribuciones de los parámetros y estadísticos de bondad de ajuste en cuestión por escenario y sus respectivos histogramas.

Un detalle importante de precisar antes de entrar a abordar los resultados del estudio basado en simulaciones, se refiere a que el porcentaje de no convergencia de los modelos fue muy bajo en general. Sin embargo, hay una diferencia en dicha proporción de convergencia de los modelos según el tamaño de la muestra: los escenarios con 100 observaciones son los que presentan los problemas de no convergencia.

Para los escenarios con 200 observaciones solo tres de la totalidad de los modelos estimados no convergen (particularmente en el escenario 18, en el que las tres indicadores tienen asimetría igual a 2,7). En contraste, en los escenarios con 100 observaciones, en cinco de los nueve escenarios existió algún problema de convergencia, en las cuales el mayor porcentaje de no convergencia es de 2,4% para el caso donde las tres indicadores tienen 2,7 de asimetría<sup>9</sup>.

#### **4.1 Resultados sobre las cargas factoriales**

Antes de mostrar los resultados obtenidos para las cargas factoriales, resulta adecuado recordar que en el plan de simulación se fijan inicialmente los valores de estas en 0,70. Lo anterior, fundamentado en el hecho de que esa es una magnitud de la carga que indica que la variable medible está altamente asociada a la variable latente que le corresponde (plantenado así un supuesto de estructura).

En los cuadros 2, 3 y 4 se presentan las medias, desviaciones estándar y los percentiles 2,5 y 97,5 de las cargas factoriales  $\lambda_{x_{11}}$ ,  $\lambda_{x_{21}}$ ,  $\lambda_{x_{31}}$ ,  $\lambda_{x_{42}}$ ,  $\lambda_{x_{52}}$ ,  $\lambda_{x_{62}}$  y  $\lambda_{y_{11}}$ ,  $\lambda_{y_{21}}$ ,  $\lambda_{y_{31}}$ , donde las primeras seis son las cargas factoriales de las dos variables exógenas del modelo de simulación y las restantes tres son las cargas de la variable endógena. Cabe destacar que las variables indicadoras de las

---

<sup>9</sup> En el Anexo 1 se puede encontrar un cuadro resumen con los porcentajes de no convergencia según escenario.



variables exógenas poseen una distribución normal; por tanto, simétrica en todas las simulaciones. Mientras que las parcelas correspondientes a  $\lambda_{y_{11}}$ ,  $\lambda_{y_{21}}$ ,  $\lambda_{y_{31}}$  son a las que se les varió la magnitud de la asimetría positiva según el escenario de simulación.

Para analizar el comportamiento de las cargas factoriales de las variables indicadoras de las distintas variables latentes, se observa la diferencia entre cada uno de los promedios de las distribuciones de los valores estimados de cada carga en las réplicas de los diversos escenarios de simulación, con respecto al valor que fue fijado para la simulación (0,70). Es decir, se cuantifica el sesgo de la estimación de la carga factorial para los dieciocho escenarios planteados.

En el caso de las cargas factoriales para variables exógenas ( $\lambda_{x_{11}}$ ,  $\lambda_{x_{21}}$ ,  $\lambda_{x_{31}}$ ,  $\lambda_{x_{42}}$ ,  $\lambda_{x_{52}}$ ,  $\lambda_{x_{62}}$ ), el sesgo toma un valor máximo de 0,01 (cuadros 1 y 2). Lo anterior es indiferente de los dos tamaños de muestra, los diversos tamaños de asimetría y el número de indicadoras asimétricas para la variable latente endógena.

Este es un resultado esperado, debido a que la determinación de las magnitudes de las seis cargas factoriales de las variables endógenas no está vinculada con los valores de las variables indicadoras que poseen las asimetrías. Esto es una confirmación de que las simulaciones se desarrollaron adecuadamente y fueron estables para estos estadísticos. En el Anexo 2 se presentan los histogramas de las distribuciones normales de estas cargas factoriales en los casos control.

Cuadro 2 Media, desviación estándar, percentiles 2,5 y 97,5 de las cargas factoriales  $\lambda_{x_{11}}$ ,  $\lambda_{x_{21}}$ ,  $\lambda_{x_{31}}$  estimadas en 500 iteraciones para cada escenario de simulación

Escenario de simulación		$\lambda_{x_{11}}$				$\lambda_{x_{21}}$				$\lambda_{x_{31}}$			
Variables modificadas	Nivel de asimetría	$\bar{x}$	s	P <sub>2,5</sub>	P <sub>97,5</sub>	$\bar{x}$	s	P <sub>2,5</sub>	P <sub>97,5</sub>	$\bar{x}$	s	P <sub>2,5</sub>	P <sub>97,5</sub>
<b>n=100</b>													
Control	0	0,701	0,075	0,538	0,829	0,701	0,078	0,540	0,850	0,699	0,074	0,554	0,834
y1	0,70	0,701	0,075	0,549	0,836	0,703	0,073	0,547	0,833	0,698	0,073	0,550	0,830
y1	1,70	0,700	0,073	0,548	0,844	0,703	0,077	0,549	0,843	0,700	0,077	0,532	0,835
y1	2,70	0,702	0,074	0,535	0,836	0,699	0,073	0,548	0,829	0,702	0,070	0,554	0,833
y1, y2	0,70	0,699	0,074	0,531	0,831	0,699	0,078	0,528	0,833	0,700	0,073	0,541	0,825
y1, y2	1,70	0,704	0,070	0,560	0,841	0,705	0,073	0,562	0,841	0,706	0,073	0,556	0,836
y1, y2	2,70	0,699	0,074	0,547	0,832	0,702	0,071	0,544	0,832	0,701	0,073	0,552	0,839
y1, y2, y3	0,70	0,705	0,073	0,554	0,836	0,704	0,071	0,558	0,836	0,697	0,073	0,545	0,835
y1, y2, y3	1,70	0,703	0,075	0,547	0,841	0,707	0,073	0,553	0,836	0,695	0,076	0,531	0,833
y1, y2, y3	2,70	0,699	0,074	0,538	0,833	0,697	0,074	0,538	0,825	0,702	0,071	0,565	0,824
<b>n=200</b>													
Control	0	0,700	0,050	0,603	0,793	0,697	0,052	0,589	0,789	0,702	0,050	0,597	0,800
y1	0,70	0,697	0,050	0,594	0,793	0,706	0,053	0,597	0,800	0,697	0,053	0,592	0,791
y1	1,70	0,700	0,049	0,598	0,785	0,701	0,050	0,602	0,794	0,699	0,053	0,596	0,794
y1	2,70	0,699	0,051	0,598	0,791	0,698	0,054	0,579	0,799	0,696	0,051	0,603	0,789
y1, y2	0,70	0,701	0,050	0,603	0,791	0,700	0,051	0,601	0,798	0,700	0,051	0,595	0,796
y1, y2	1,70	0,696	0,053	0,588	0,793	0,702	0,050	0,598	0,792	0,701	0,051	0,600	0,792
y1, y2	2,70	0,699	0,050	0,596	0,788	0,697	0,055	0,580	0,795	0,697	0,052	0,597	0,789
y1, y2, y3	0,70	0,700	0,051	0,595	0,794	0,697	0,052	0,589	0,797	0,698	0,053	0,592	0,794
y1, y2, y3	1,70	0,706	0,051	0,601	0,800	0,701	0,051	0,605	0,794	0,696	0,052	0,598	0,793
y1, y2, y3	2,70	0,700	0,052	0,601	0,796	0,703	0,051	0,598	0,796	0,698	0,050	0,592	0,785

1/ Estas cargas factoriales fueron fijadas con el valor 0,70 al diseñar el modelo de simulación.

**Fuente:** Elaboración propia.

Cuadro 3 Media, desviación estándar, percentiles 2,5 y 97,5 de las cargas factoriales  $\lambda_{x_{42}}$ ,  $\lambda_{x_{52}}$ ,  $\lambda_{x_{62}}$  estimadas en 500 iteraciones para cada escenario de simulación

Escenario de simulación		$\lambda_{x_{42}}$				$\lambda_{x_{52}}$				$\lambda_{x_{62}}$			
Variables medibles modificadas	Nivel de asimetría												
		$\bar{x}$	s	P <sub>2,5</sub>	P <sub>97,5</sub>	$\bar{x}$	s	P <sub>2,5</sub>	P <sub>97,5</sub>	$\bar{x}$	s	P <sub>2,5</sub>	P <sub>97,5</sub>
n=100													
Control	0	0,698	0,076	0,527	0,826	0,703	0,074	0,546	0,828	0,704	0,075	0,547	0,836
y1	0,70	0,700	0,076	0,546	0,827	0,700	0,077	0,556	0,834	0,700	0,074	0,560	0,827
y1	1,70	0,704	0,072	0,556	0,836	0,699	0,073	0,554	0,838	0,697	0,072	0,545	0,821
y1	2,70	0,699	0,070	0,556	0,822	0,704	0,073	0,539	0,825	0,701	0,073	0,551	0,826
y1, y2	0,70	0,705	0,076	0,554	0,842	0,699	0,070	0,554	0,822	0,704	0,074	0,554	0,836
y1, y2	1,70	0,700	0,074	0,544	0,834	0,702	0,075	0,551	0,843	0,712	0,074	0,558	0,846
y1, y2	2,70	0,696	0,076	0,539	0,832	0,701	0,072	0,540	0,833	0,702	0,073	0,562	0,837
y1, y2, y3	0,70	0,699	0,068	0,556	0,813	0,699	0,073	0,549	0,827	0,705	0,074	0,545	0,834
y1, y2, y3	1,70	0,708	0,070	0,554	0,834	0,700	0,076	0,524	0,826	0,707	0,073	0,544	0,836
y1, y2, y3	2,70	0,702	0,067	0,570	0,828	0,704	0,072	0,528	0,829	0,704	0,072	0,557	0,833
n=200													
Control	0	0,701	0,050	0,600	0,786	0,698	0,050	0,596	0,794	0,698	0,052	0,599	0,791
y1	0,70	0,699	0,052	0,600	0,792	0,699	0,055	0,593	0,799	0,703	0,049	0,601	0,795
y1	1,70	0,704	0,052	0,596	0,796	0,702	0,052	0,606	0,803	0,701	0,052	0,592	0,790
y1	2,70	0,698	0,050	0,593	0,786	0,703	0,048	0,604	0,793	0,699	0,049	0,604	0,797
y1, y2	0,70	0,694	0,048	0,596	0,784	0,704	0,049	0,595	0,794	0,699	0,052	0,588	0,802
y1, y2	1,70	0,701	0,051	0,595	0,797	0,703	0,051	0,601	0,788	0,701	0,052	0,589	0,790
y1, y2	2,70	0,700	0,052	0,593	0,793	0,699	0,052	0,586	0,791	0,700	0,051	0,584	0,793
y1, y2, y3	0,70	0,697	0,051	0,590	0,787	0,698	0,051	0,597	0,789	0,698	0,049	0,590	0,780
y1, y2, y3	1,70	0,701	0,049	0,601	0,786	0,701	0,049	0,602	0,791	0,704	0,049	0,605	0,794
y1, y2, y3	2,70	0,704	0,046	0,615	0,792	0,702	0,049	0,610	0,794	0,700	0,050	0,596	0,787

1/ Estas cargas factoriales fueron fijadas con el valor 0,70 al diseñar el modelo de simulación.

**Fuente:** Elaboración propia.

Los valores de la desviación estándar para las distribuciones de las cargas factoriales de las variables exógenas en los diversos escenarios con un tamaño de muestra de 100 observaciones, en general son más grandes (alrededor de 0,70) que aquellos para el tamaño de muestra de 200 observaciones (alrededor de 0,50). Es decir, cuanto más grande sea la muestra la variación en la

distribución de las cargas factoriales, menor es en todos los contextos de simulación.

Con respecto a las cargas factoriales correspondientes a la variable endógena del modelo  $(\lambda_{y_{11}}, \lambda_{y_{21}}, \lambda_{y_{31}})$ , cuando la asimetría es igual a 0,70 para las diversas cantidades de variables indicadoras asimétricas (de una a tres), el sesgo de estimación es como máximo -0,01 para ambos tamaños de muestra. Es decir, no hay un efecto importante en la estimación de las cargas factoriales con dicha magnitud de asimetría para ambos tamaños de muestra en las variables indicadoras (con una, dos o tres parcelas asimétricas).

En el caso de asimetría igual a 1,70, cuando el tamaño de muestra es igual a 100, el máximo valor que toma el sesgo es de 0,02. Mientras que cuando el tamaño de muestra es de 200, el máximo valor que toma el sesgo es de 0,01. Estos sesgos se encuentran solo en las cargas factoriales correspondientes a la variable medible con asimetría positiva. Es decir, las variables medibles con simetría siguen produciendo cargas factoriales prácticamente insesgadas.

Cuando la asimetría es de 2,70, con una, dos o tres indicadoras asimétricas, el sesgo aumenta a 0,02, en ambos tamaños de muestra. Un elemento llamativo es que cuando la muestra es igual a 100, el sesgo es igual en las tres cargas cuando hay asimetría de 2,70 en las tres parcelas correspondientes, pero con el tamaño de muestra de 200, la segunda y la tercera carga tienen un sesgo de 0,01. Sin embargo, el sesgo sigue siendo poco relevante en términos prácticos.

Sobre las desviaciones estándar, en el cuadro 4 se puede visualizar una tendencia. Dicho patrón consiste en cuanto más aumenta la asimetría y más se alejan las distribuciones de las variables indicadoras de una distribución normal y la variabilidad de las estimaciones de las cargas factoriales aumenta. Ahora bien, la variabilidad disminuye levemente cuando la muestra es de 200, en comparación con los escenarios paralelos de 100 observaciones.

Concretamente, lo anterior se ve al analizar las desviaciones estándar, pues cuanto más aumenta la asimetría, más aumentan las desviaciones de la

distribución de las cargas factoriales. Y cuando se toma en cuenta el tamaño de muestra, la variabilidad es menor en los casos con 200 observaciones, en comparación con el caso de 100 observaciones.

Cuando el tamaño de muestra es igual a 100, la desviación estándar mayor es de 0,094, mientras que en el caso control está entre 0,067 o 0,072. Por otro lado, cuando el tamaño de muestra es 200, la desviación estándar más grande es igual a 0,065, mientras que en el caso control correspondiente está entre 0,48 y 0,49. Esos valores máximos en la desviación se mantienen para las cargas factoriales de las variables indicadoras, con asimetrías iguales a 2,70 en las tres variables medibles. Es decir, el caso de asimetría más alto analizado en la investigación.

Es importante destacar que uno de los comportamientos generales que se pueden observar en los resultados expuestos hasta este momento, es que los efectos de la asimetría en las variables medibles se ven solo en las cargas factoriales correspondientes a la (las) parcelas(s) asimétrica(s) correspondiente(s). Es decir, si  $y_1$  es asimétrica sólo  $\lambda_{y_{11}}$  se sesga, mientras que  $\lambda_{y_{21}}$  y  $\lambda_{y_{31}}$  toman los valores que les corresponden.

Cuadro 4 Media, desviación estándar, percentiles 2,5 y 97,5 de las cargas factoriales asociadas a la variable endógena  $\lambda_{y_{11}}$ ,  $\lambda_{y_{21}}$ ,  $\lambda_{y_{31}}$  estimadas en 500 iteraciones para cada escenario de simulación

Escenario de simulación		$\lambda_{y_{11}}$				$\lambda_{y_{21}}$				$\lambda_{y_{31}}$			
Variables medibles modificadas	Nivel de asimetría												
		$\bar{x}$	$s$	$P_{2,5}$	$P_{97,5}$	$\bar{x}$	$s$	$P_{2,5}$	$P_{97,5}$	$\bar{x}$	$s$	$P_{2,5}$	$P_{97,5}$
n=100													
Control	0	0,700	0,067	0,554	0,819	0,695	0,071	0,548	0,825	0,702	0,072	0,545	0,835
y1	0,70	0,697	0,069	0,540	0,813	0,698	0,068	0,555	0,819	0,697	0,067	0,554	0,812
y1	1,70	0,704	0,058	0,588	0,803	0,694	0,069	0,550	0,817	0,700	0,067	0,559	0,818
y1	2,70	0,696	0,055	0,584	0,804	0,698	0,069	0,542	0,812	0,702	0,069	0,573	0,825
y1, y2	0,70	0,704	0,064	0,564	0,809	0,702	0,069	0,558	0,821	0,698	0,066	0,554	0,817
y1, y2	1,70	0,710	0,069	0,576	0,838	0,704	0,070	0,563	0,831	0,700	0,069	0,545	0,816
y1, y2	2,70	0,712	0,078	0,552	0,856	0,712	0,072	0,575	0,847	0,694	0,068	0,548	0,818
y1, y2, y3	0,70	0,705	0,065	0,581	0,823	0,704	0,072	0,552	0,820	0,708	0,070	0,551	0,826
y1, y2, y3	1,70	0,722	0,073	0,564	0,842	0,713	0,073	0,559	0,843	0,715	0,076	0,553	0,850
y1, y2, y3	2,70	0,725	0,090	0,541	0,882	0,727	0,091	0,522	0,884	0,721	0,094	0,539	0,883
n=200													
Control	0	0,694	0,048	0,596	0,776	0,700	0,049	0,598	0,788	0,701	0,045	0,614	0,783
y1	0,70	0,703	0,047	0,615	0,792	0,700	0,051	0,595	0,794	0,700	0,047	0,601	0,786
y1	1,70	0,700	0,043	0,612	0,780	0,701	0,049	0,600	0,796	0,700	0,050	0,596	0,785
y1	2,70	0,699	0,040	0,618	0,770	0,705	0,046	0,610	0,790	0,700	0,047	0,607	0,789
y1, y2	0,70	0,703	0,049	0,594	0,793	0,699	0,048	0,604	0,788	0,698	0,051	0,594	0,789
y1, y2	1,70	0,704	0,048	0,602	0,788	0,702	0,045	0,609	0,782	0,700	0,045	0,608	0,784
y1, y2	2,70	0,705	0,053	0,596	0,800	0,703	0,051	0,594	0,801	0,697	0,045	0,603	0,785
y1, y2, y3	0,70	0,699	0,048	0,600	0,785	0,703	0,048	0,607	0,791	0,702	0,050	0,611	0,799
y1, y2, y3	1,70	0,710	0,051	0,604	0,807	0,706	0,052	0,604	0,807	0,702	0,053	0,595	0,793
y1, y2, y3	2,70	0,720	0,060	0,597	0,825	0,716	0,063	0,589	0,831	0,715	0,065	0,584	0,831

1/ Estas cargas factoriales fueron fijadas con el valor 0,70 al diseñar el modelo de simulación.

Fuente: Elaboración propia.

A continuación se presenta un conjunto de histogramas con las distribuciones de muestreo de las cargas factoriales basadas en 500 réplicas en cada escenario de simulación. En otras palabras, los histogramas corresponden a diversas combinaciones de los tamaños de muestra, el número de parcelas asimétricas y la magnitud de la asimetría definidos en el plan de simulación.

Las figuras 1 y 2 son los histogramas de las distribuciones de muestreo de la carga factorial  $\lambda_{y_{11}}$ , con tamaños de muestra de 100 y 200 observaciones, respectivamente. En ambas figuras se puede notar que los histogramas correspondientes a variables medibles con asimetría de 0,70 (primera fila) están centrados en el valor que se fijaron las cargas factoriales para la simulación (el valor 0,70 que corresponde a la línea azul). También se puede ver cómo estas distribuciones tienden a la normalidad, lo cual refuerza el hallazgo de que el método de estimación por máxima verosimilitud puede realizar buenas estimaciones de las cargas, pese al incumplimiento del supuesto de normalidad en todas las variables medibles, dada esa magnitud de asimetría positiva.

A la vez, en estas mismas figuras podemos notar que, conforme aumenta la magnitud de la asimetría y el número de variables medibles asimétricas, las distribuciones tienden hacia una ligera asimetría negativa. Ello también implica que exista un aumento en la probabilidad de sobrestimar los valores de las cargas factoriales cuando aumenta la asimetría positiva en las variables indicadoras que les corresponden.

Con respecto al tamaño de la muestra, tal como se esperaba, cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, se puede observar como las distribuciones de muestreo presentan mayor simetría y mayor kurtosis. Sin embargo, esto no asegura menor precisión en las estimaciones de la carga factorial en cuestión, pues una importante mayoría de las estimaciones de las cargas se encuentran cercanas al valor fijado para cada uno de los estadísticos en cuestión.

En las figuras 3 y 4 se presentan los histogramas de  $\lambda_{y_{21}}$  para 100 y 200 observaciones, respectivamente. Para ambas matrices de gráficos, en los

histogramas de la primera columna se puede observar que prácticamente no hay sesgos debido que en esos casos la variable medible respectiva a la carga ( $y_2$ ) es simétrica.

En las dos matrices de gráficos se evidencia que cuando la asimetría es igual a 0,70, no hay sesgo relevante en las estimaciones del valor de la carga para los dos  $n$ . Con 100 observaciones y asimetrías de 1,70 y 2,70 se vuelve a ver la tendencia a una ligera asimetría negativa en la distribución de  $\lambda_{y_{21}}$  cuando hay asimetría positiva en  $y_{21}$  o en  $y_{21}$  y  $y_{31}$  simultáneamente, y por tanto, mayor probabilidad de sobrestimar los valores de las cargas factoriales.

Finalmente, en las figuras 5 y 6 se presentan dos matrices de histogramas de la distribución de muestreo de  $\lambda_{y_{31}}$  cuando se realizan las simulaciones con muestras de 100 y 200 observaciones, respectivamente. En dichas matrices, la primera y la segunda columna tienen un comportamiento prácticamente simétrico, insesgado y similar entre ellas, pues la parcela que le corresponde a  $\lambda_{y_{31}}$  está distribuida normalmente. Sin embargo, se puede visibilizar cómo el histograma con mayor tendencia a una ligera asimetría negativa es aquel en el que todas las parcelas tienen una asimetría de 2,7.

En general, para las cargas factoriales, cabe destacar que los hallazgos obtenidos permiten afirmar que cuanto más grande sea la asimetría positiva en las variables medibles, más asimétrica negativa sería la distribución de muestreo del  $\lambda$  correspondiente a la parcela que no cumpla con el supuesto de normalidad.

Al mismo tiempo, se puede observar que, cuando el tamaño de muestra es 200, la varianza de la distribución de la carga se reduce levemente, la distribución de muestreo es más simétrica y presenta mayor kurtosis, en comparación con el mismo escenario de asimetría para 100 observaciones, tal como lo muestran los percentiles 2,5 y 97,5 en el cuadro 3. No obstante, esto no significa que haya más probabilidad de estimar inadecuadamente las cargas factoriales, debido a que, según los Anexos 3 y 4, la proporción de la curva de densidad de las cargas



factoriales fuera del intervalo de confianza es más pequeña en los escenarios con muestra de 200 observaciones que con 100.

Como un complemento a las matrices de histogramas, en los Anexos del 3 al 8 se presentan gráficos de densidad de las distribuciones de las cargas factoriales para cada escenario de simulación. Dichas curvas de densidad son contrastadas con la curva de densidad del caso control de las cargas factoriales.

Estos gráficos anexos muestran diversos elementos que permiten resumir los hallazgos de la sección, retomando lo discutido a partir de los cuadros y las matrices de histogramas:

1. A mayor asimetría en las parcelas, hay una ligera tendencia a la asimetría negativa en las curvas de densidad. Esto se traduce en que hay mayor probabilidad de sobrestimar los valores de la carga factorial.
2. Cuando hay tres parcelas con asimetría 1,7 o 2,7, es cuando más distan las curvas de densidad del escenario de simulación y el caso control, al ser más grande el sesgo, con una asimetría de 2,7.
3. El sesgo en general tiende a ser mayor cuando la muestra es menor. Es decir, las curvas de densidad del caso control y el caso del escenario se traslapan en mayor medida cuando la muestra es de 200.
4. Las cargas factoriales que proceden de parcelas con normalidad poseen distribuciones que tienden a la normalidad, centradas en el valor fijado para la simulación.

Ahora bien, con estas observaciones se pretende hacer notar varias tendencias en el comportamiento de los escenarios de simulación, pero, en general, el sesgo en las cargas factoriales es irrelevante a nivel práctico y esto quiere decir que para estimar estos estadísticos, el método de máxima verosimilitud es robusto en las condiciones del modelo de simulación planteado.

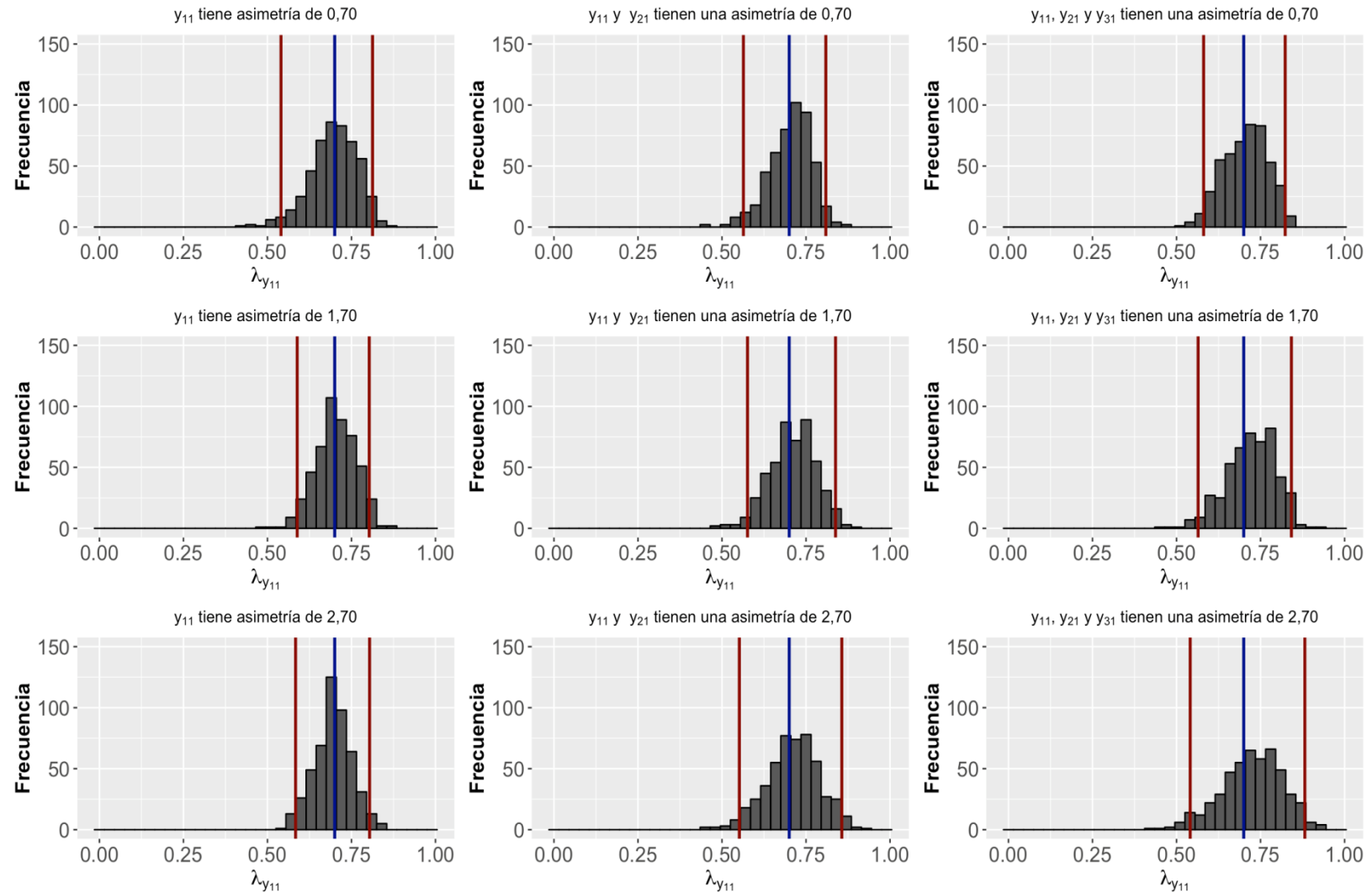


Figura 1 Distribución del coeficiente  $\lambda_{y_{11}}$  basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y un tamaño de muestra de 100 para cada escenario de simulación  
 1/ La línea azul es el valor 0,70 con el que se fijaron las cargas factoriales en la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

**Fuente:** Elaboración propia.

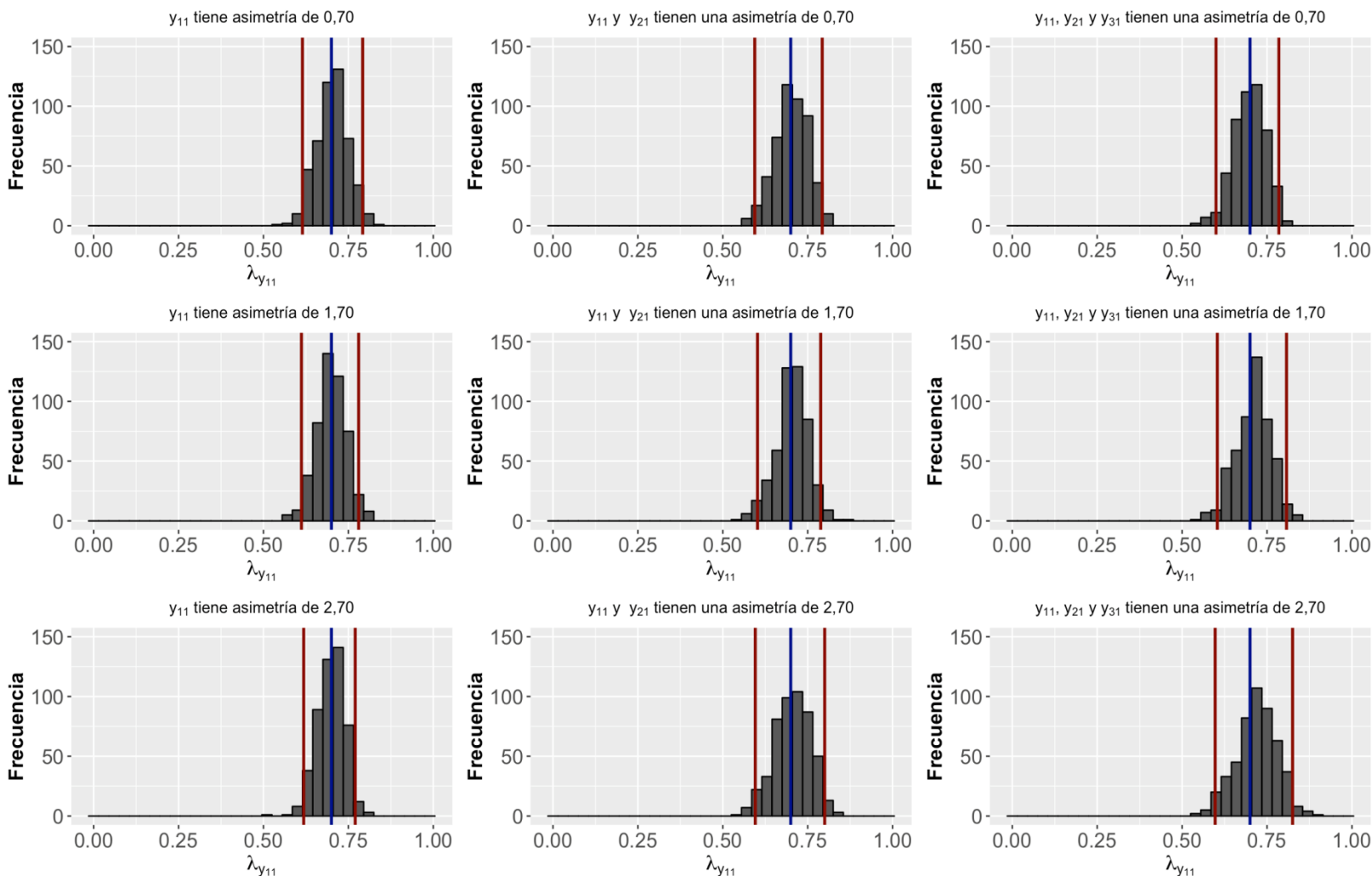


Figura 2 Distribución del coeficiente  $\lambda_{y_{11}}$  basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y un tamaño de muestra de 200 para cada escenario de simulación  
 1/ La línea azul es el valor 0,70 con el que se fijaron las cargas factoriales en la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

**Fuente:** Elaboración propia.

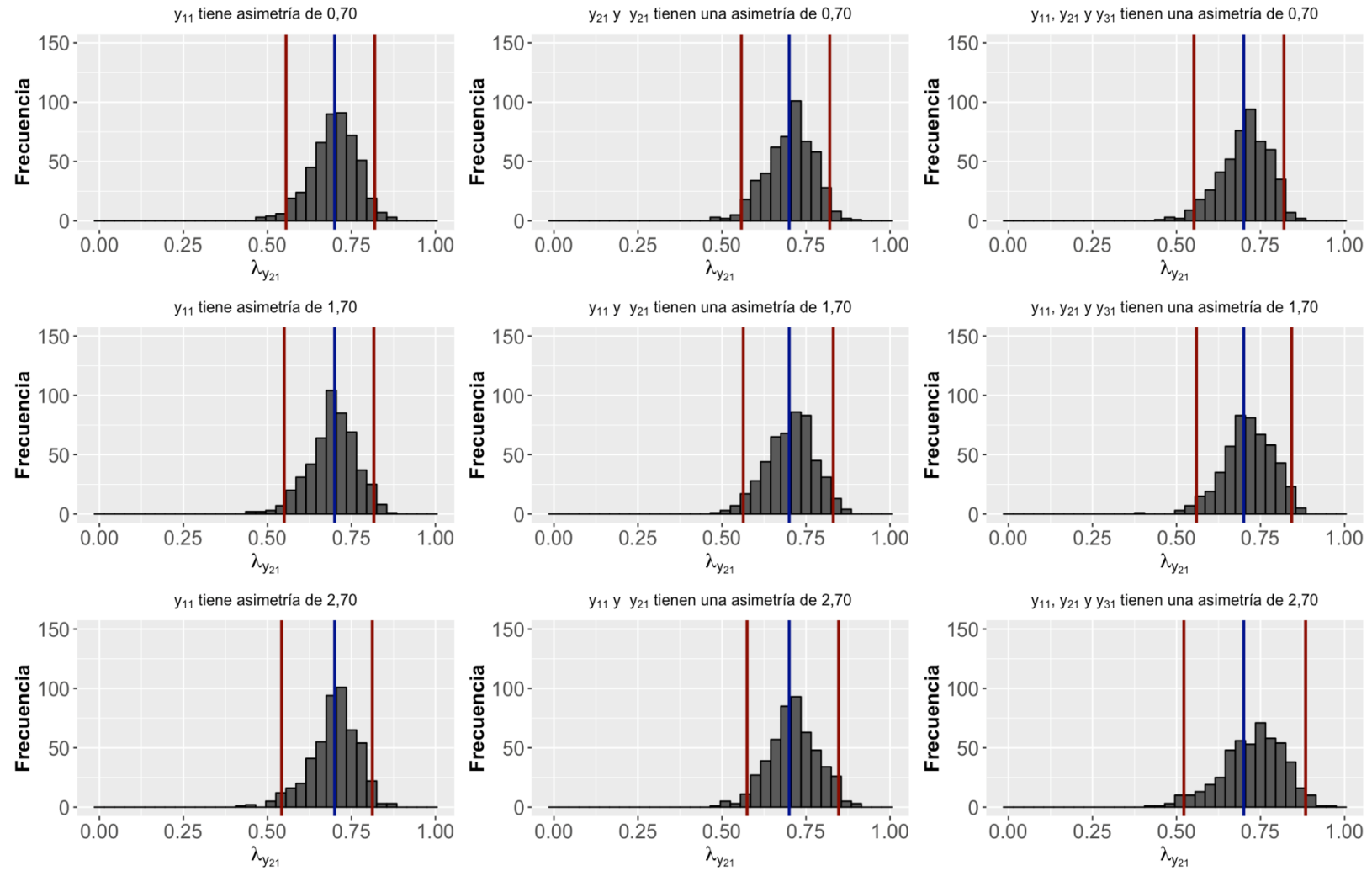


Figura 3 Distribución del coeficiente  $\lambda_{y_{21}}$  basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y un tamaño de muestra de 100 para cada escenario de simulación  
 1/ La línea azul es el valor 0,70 con el que se fijaron las cargas factoriales en la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

**Fuente:** Elaboración propia.

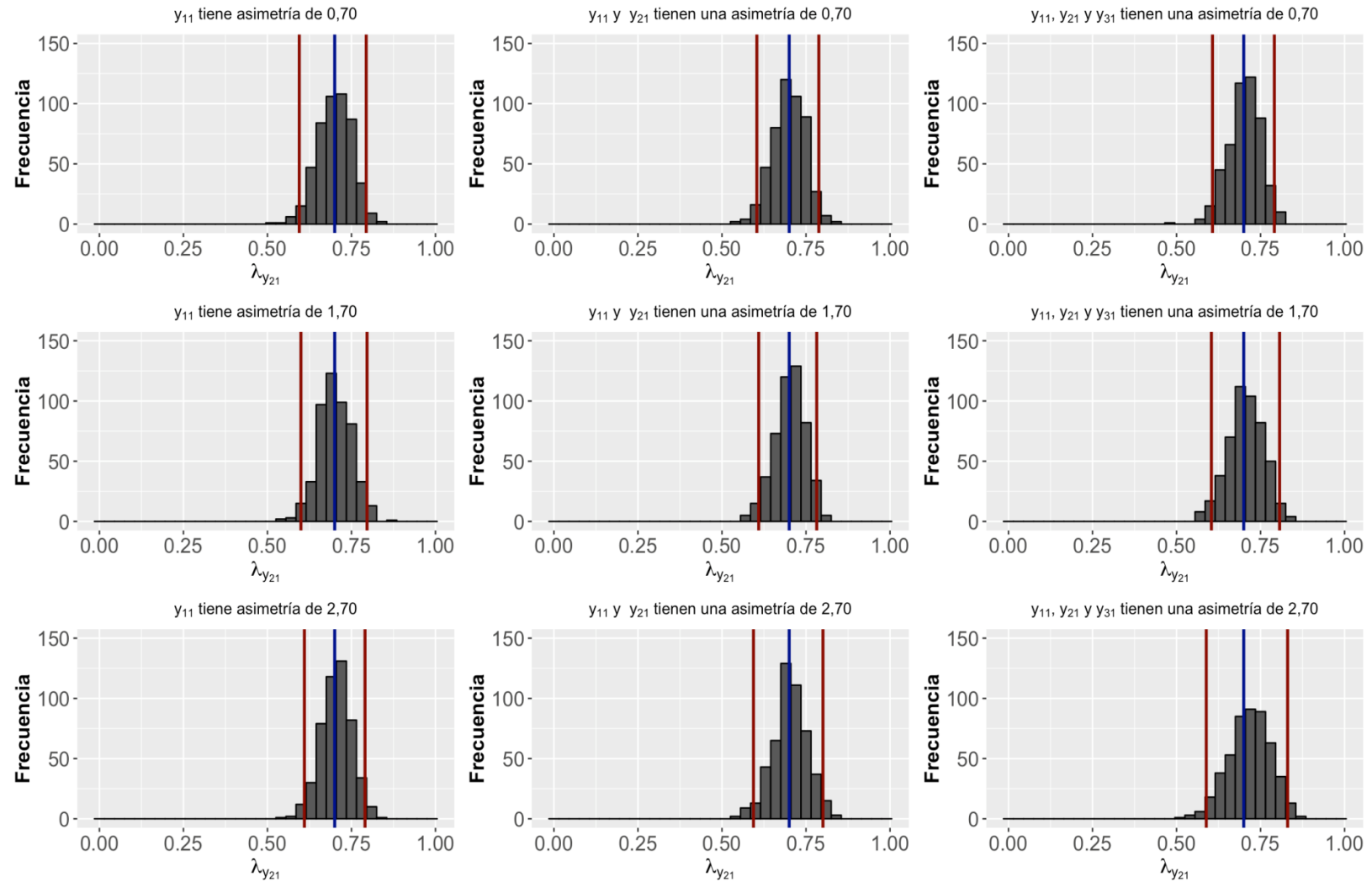


Figura 4 Distribución del coeficiente  $\lambda_{y_{21}}$  basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y un tamaño de muestra de 200 para cada escenario de simulación  
 1/ La línea azul es el valor 0,70 con el que se fijaron las cargas factoriales en la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

**Fuente:** Elaboración propia.

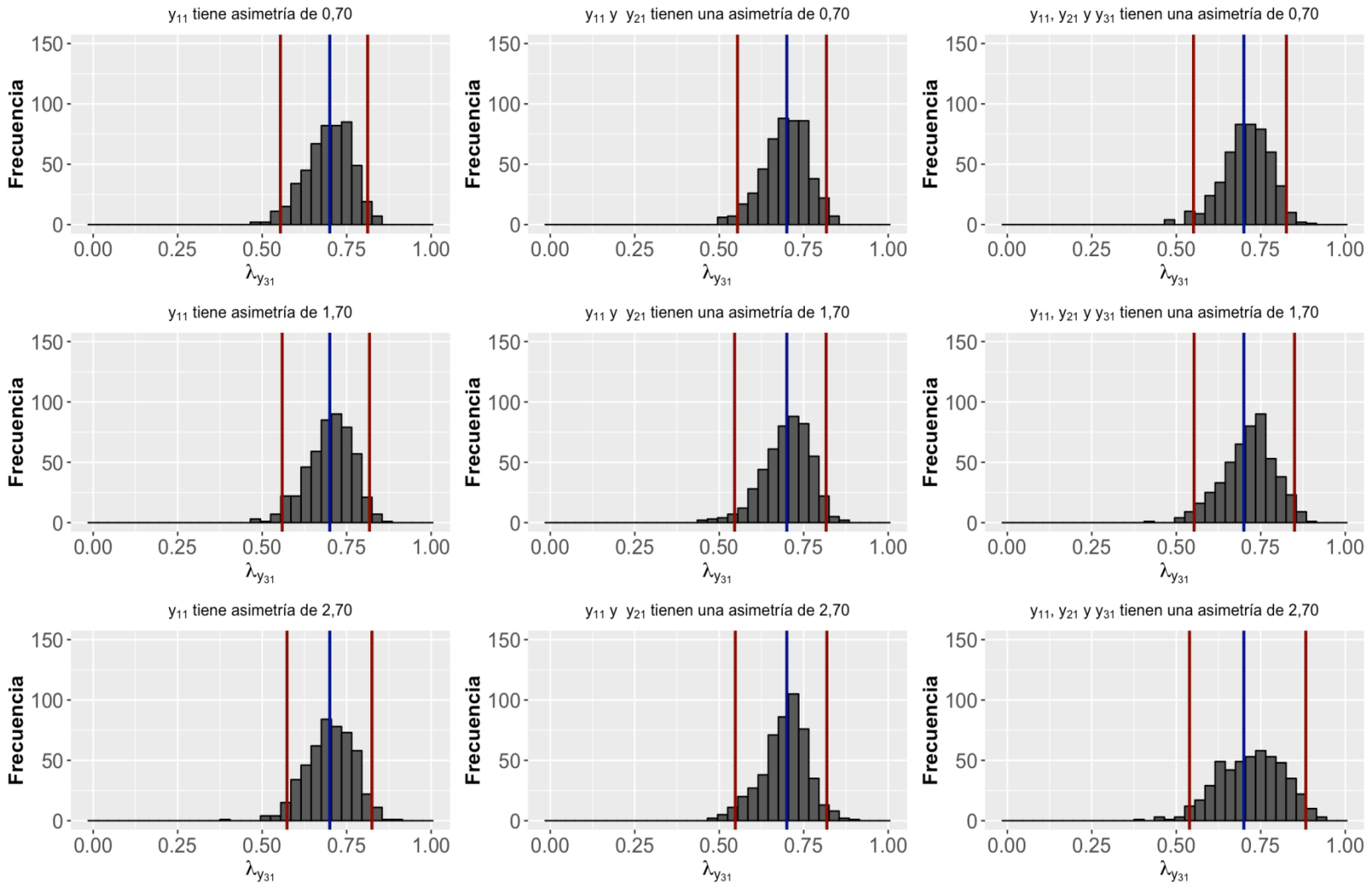


Figura 5 Distribución del coeficiente  $\lambda_{y_{31}}$  basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y un tamaño de muestra de 100 para cada escenario de simulación  
 1/ La línea azul es el valor 0,70 con el que se fijaron las cargas factoriales en la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

**Fuente:** Elaboración propia.

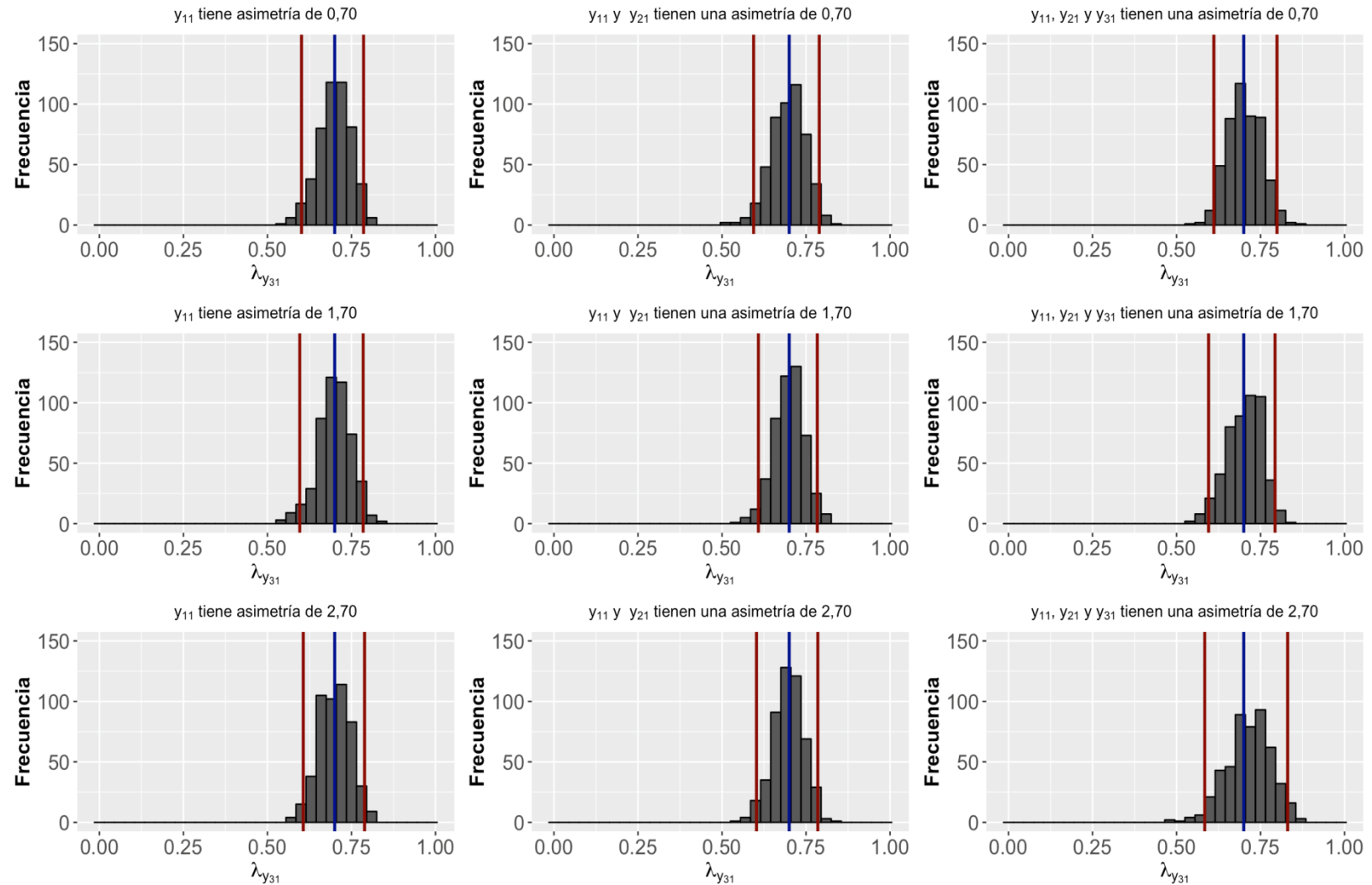


Figura 6 Distribución del coeficiente  $\lambda_{y_{31}}$  basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y un tamaño de muestra de 200 para cada escenario de simulación  
 1/ La línea azul es el valor 0,70 con el que se fijaron las cargas factoriales en la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

**Fuente:** Elaboración propia.

## 4.2 Resultados sobre los coeficientes del modelo estructural

Los coeficientes que se estudian en esta subsección son los coeficientes del modelo estructural ( $\gamma_{11}$  y  $\gamma_{12}$ ). Estos cuantifican la asociación entre las variables latentes exógenas y la variable latente endógena del modelo.

Cabe destacar que el aporte teórico metodológico de esta investigación justamente se encuentra en esta sección. Lo anterior, debido a que la discusión en la comunidad científica sobre los efectos de la asimetría en las estimaciones de los modelos de ecuaciones estructurales no se ha llevado a cabo en modelos de simulación que incorporen variables endógenas.

En el cuadro 5 se presentan la media, la desviación estándar y los percentiles 2,5 y 97,5 de las distribuciones (basadas en 500 iteraciones del modelo de simulación) de cada uno de los coeficientes del modelo estructural en los 18 escenarios de simulación. El valor con el cual se fijaron estos coeficientes al plantear la simulación es de 0,5. Por tanto, para calcular el sesgo se debe restar dicho valor a la media obtenida de la distribución del coeficiente en cada escenario de simulación.

El cuadro 5 muestra que con un tamaño de muestra de 100, las medias de las distribuciones de los coeficientes toman valores entre 0,48 y 0,51 en todos los escenarios de simulación. En estos casos, las desviaciones estándar son similares (entre 0,118 y 0,129), pero hay una tendencia a la disminución de estas cuando la asimetría aumenta. Con 200 observaciones en la muestra, las medias siguen tomando valores similares (prácticamente iguales) en todos los escenarios de simulación, pero las desviaciones estándar se reducen pues estas varían entre 0,091 y 0,082.



Cuadro 5 Media, desviación estándar, percentiles 2,5 y 97,5 de los coeficientes del modelo estructural  $\gamma_{11}$  y  $\gamma_{12}$  estimadas en 500 iteraciones para cada escenario de simulación

Escenario de simulación		$\gamma_{11}$				$\gamma_{12}$			
Variables medibles modificadas	Nivel de asimetría	$\bar{x}$	s	P <sub>2,5</sub>	P <sub>97,5</sub>	$\bar{x}$	s	P <sub>2,5</sub>	P <sub>97,5</sub>
<b>n=100</b>									
Control	0	0,511	0,129	0,243	0,747	0,501	0,128	0,226	0,736
y1	0,7	0,504	0,126	0,240	0,743	0,496	0,127	0,233	0,744
y1	1,7	0,499	0,131	0,214	0,740	0,505	0,129	0,245	0,751
y1	2,7	0,505	0,122	0,271	0,722	0,494	0,123	0,235	0,722
y1, y2	0,7	0,500	0,126	0,237	0,765	0,496	0,126	0,253	0,740
y1, y2	1,7	0,504	0,126	0,256	0,737	0,494	0,134	0,208	0,734
y1, y2	2,7	0,489	0,125	0,225	0,713	0,503	0,124	0,272	0,739
y1, y2, y3	0,7	0,500	0,129	0,239	0,749	0,500	0,128	0,219	0,723
y1, y2, y3	1,7	0,496	0,121	0,243	0,738	0,498	0,118	0,253	0,693
y1, y2, y3	2,7	0,486	0,119	0,257	0,714	0,475	0,118	0,242	0,698
<b>n=200</b>									
Control	0	0,495	0,091	0,318	0,656	0,506	0,089	0,329	0,671
y1	0,7	0,500	0,087	0,326	0,662	0,500	0,086	0,329	0,661
y1	1,7	0,507	0,090	0,318	0,684	0,495	0,093	0,304	0,657
y1	2,7	0,497	0,087	0,324	0,670	0,502	0,089	0,317	0,664
y1, y2	0,7	0,498	0,090	0,305	0,665	0,501	0,088	0,316	0,677
y1, y2	1,7	0,505	0,089	0,328	0,673	0,496	0,088	0,320	0,664
y1, y2	2,7	0,499	0,090	0,320	0,675	0,498	0,088	0,323	0,665
y1, y2, y3	0,7	0,497	0,090	0,312	0,674	0,498	0,088	0,332	0,660
y1, y2, y3	1,7	0,501	0,089	0,320	0,669	0,497	0,086	0,329	0,661
y1, y2, y3	2,7	0,490	0,082	0,332	0,640	0,488	0,083	0,313	0,650

1/ Estos coeficientes fueron fijados con el valor 0,50 al diseñar el modelo de simulación.

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados permiten visibilizar que para cualquiera de los 18 escenarios de simulación planteados, el sesgo en la estimación de los coeficientes del modelo estructural es muy pequeño (entre 0 y 0,02). Por tanto, ante las condiciones de simulación establecidas, la estimación por el método de máxima verosimilitud logra mostrar cierta robustez en sus estimaciones, pese al incumplimiento del supuesto de multinormalidad en las variables indicadoras y en el contexto del modelo de simulación establecido.

En la figura 7, se muestran los histogramas de la distribución de los coeficientes  $\gamma_{11}$  y  $\gamma_{12}$ , cuando hay normalidad multivariante en las parcelas del modelo y se tienen tamaños de muestra de 100 o de 200 observaciones. Vale la pena resaltar que para 200 observaciones las distribuciones de los coeficientes toman formas más simétricas, a diferencia de cuando el tamaño de la muestra es 100, pues una de las colas de las distribuciones es más alargada.

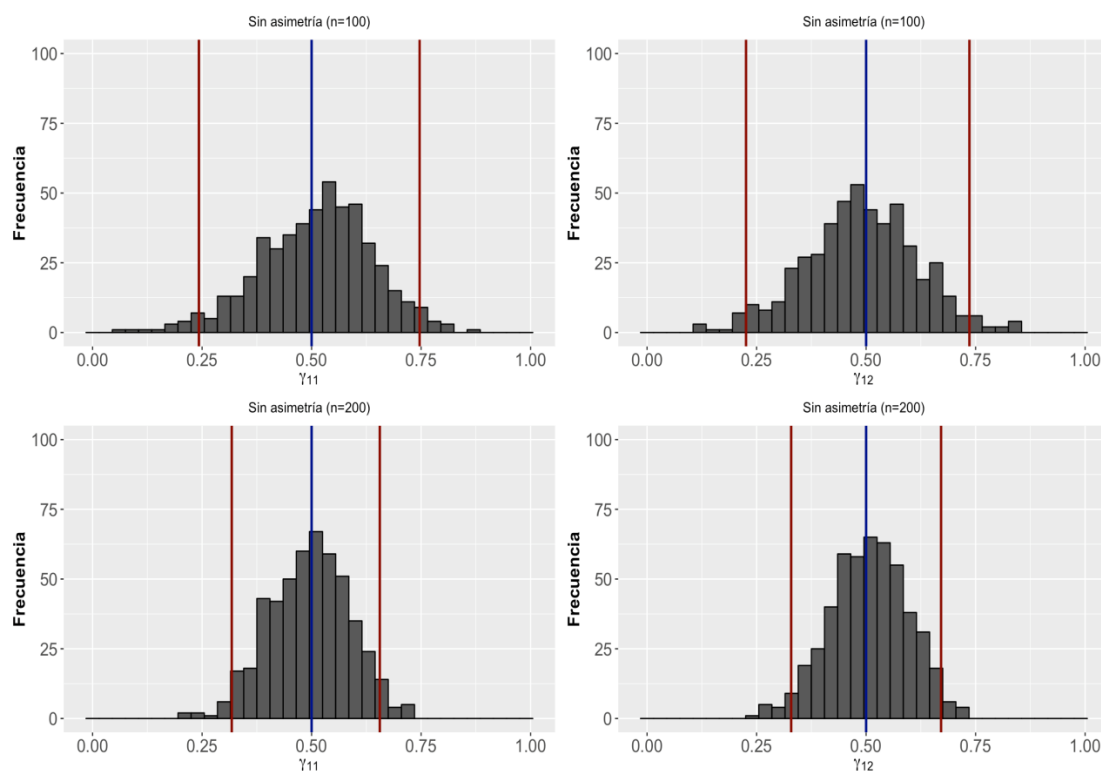


Figura 7 Distribución del coeficiente  $\gamma_{11}$  y  $\gamma_{12}$  basada en 500 iteraciones del modelo de simulación para tamaños de muestra de 100 y 200 observaciones cuando se cumple el supuesto de multinormalidad

1/ La línea azul es el valor 0,50 con el que se fijaron los coeficientes en la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

**Fuente:** Elaboración propia.

En las figuras 8 y 9 se presentan los histogramas de las distribuciones de  $\gamma_{11}$ , con un tamaño de muestra de 100 y 200 respectivamente. En las figuras 10 y 11 se muestran los histogramas de  $\gamma_{12}$ .

En el caso de los histogramas para  $\gamma_{11}$ , se puede notar que cuanto más aumenta el número de parcelas asimétricas y la asimetría positiva en las parcelas de la variable endógena del modelo, las distribuciones de los coeficientes del modelo estructural presentan una ligera asimetría negativa (sin importar el tamaño de muestra).

Es pertinente anotar que los escenarios con asimetría positiva igual a 2,70 en las tres variables medibles presentan la distribución con más asimetría negativa para  $\gamma_{11}$  (pese a que es muy tenue). Dado lo anterior, se podría concluir que cuantos más datos tenga la muestra, pese a la existencia de asimetrías positivas menores o iguales a 2,70 en una o dos de las variables medibles, el coeficiente  $\gamma_{11}$  tiende a una distribución normal.

El patrón descrito anteriormente se puede ver para 100 observaciones, pero es más visible aun para 200 observaciones. Lo anterior resulta interesante tomando en cuenta que, no obstante esa desviación de la normalidad, el sesgo en la estimación es muy pequeño para este coeficiente.

Las matrices de histogramas del coeficiente  $\gamma_{12}$  presentan las mismas características discutidas para  $\gamma_{11}$ . Esto implica que, cuando se poseen asimetrías positivas superiores a 0 y menores o iguales 2,70 en las parcelas de la variable endógena en un modelo estructural con una variable endógena y dos exógenas, la subestimación del coeficiente estructural suele ser insignificante en promedio. Dicho antecedente es válido para modelos como el planteado, con 100 y 200 observaciones, que utilizan estimación por máxima verosimilitud.

Asimismo, los Anexos del 9 al 11, que muestran las curvas de densidad de las distribuciones de los coeficientes en cuestión prácticamente, se traslapan con las curvas de densidad de los casos control correspondientes, lo cual indica que justamente su estimación se ve poco sesgada, pese a la asimetría al usar el método de máxima verosimilitud.

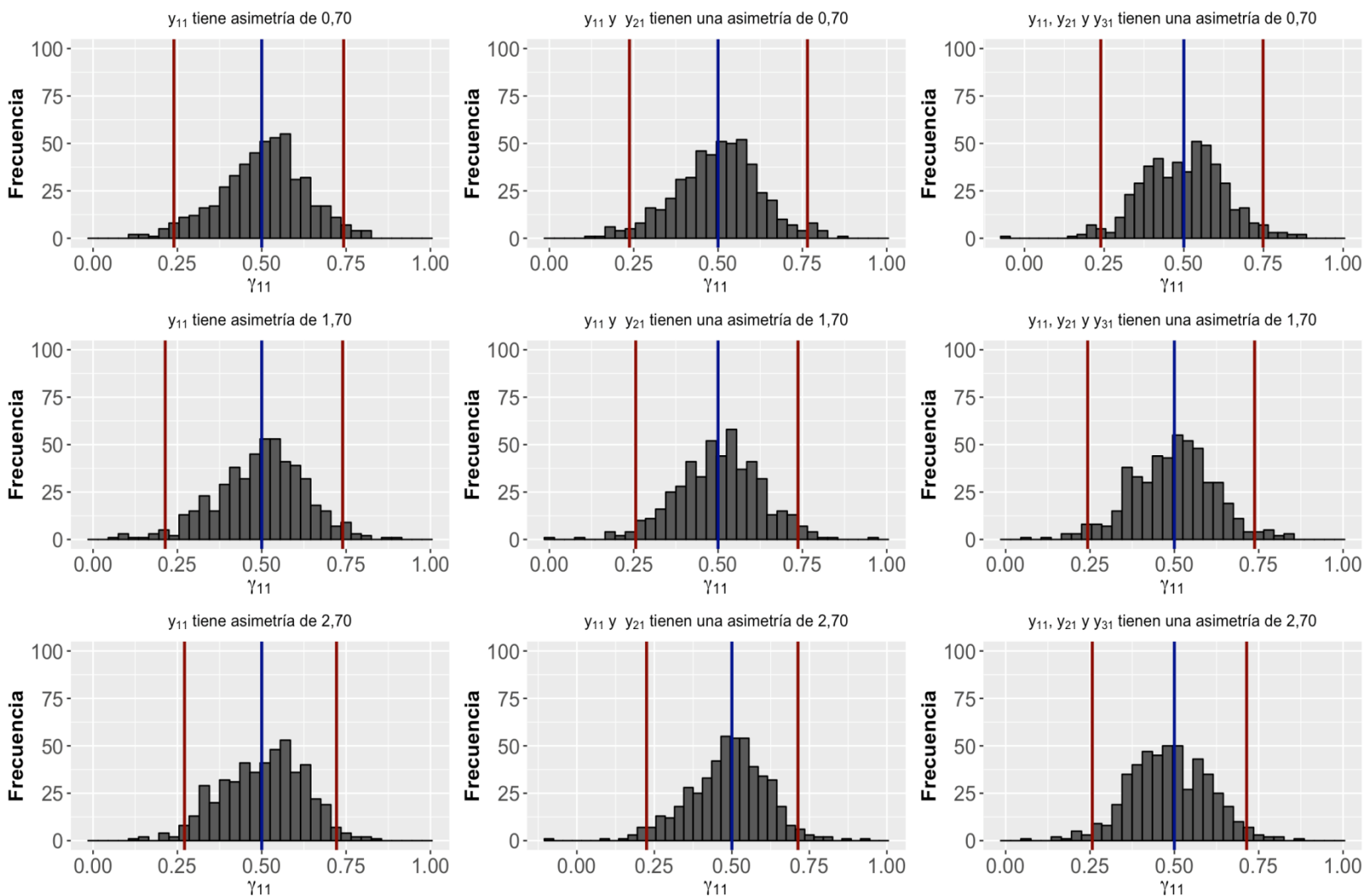


Figura 8 Distribución del coeficiente  $\gamma_{11}$  basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y un tamaño de muestra de 100 para cada escenario de simulación  
 1/ La línea azul es el valor 0,50 con el que se fijó  $\gamma_{11}$  para la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

**Fuente:** Elaboración propia.

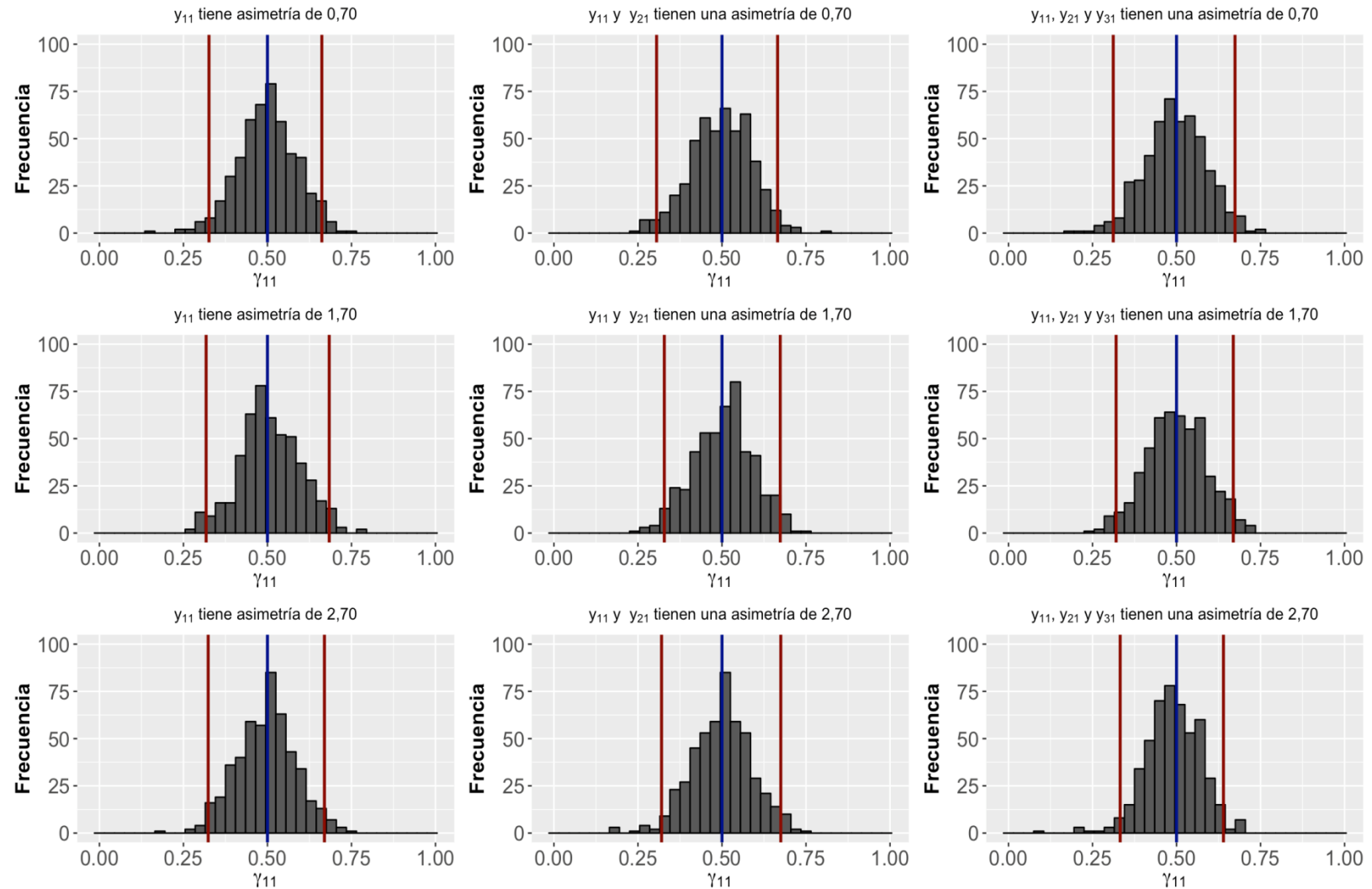


Figura 9 Distribución del coeficiente  $\gamma_{11}$  basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y un tamaño de muestra de 200 para cada escenario de simulación  
 1/ La línea azul es el valor 0,50 con el que se fijó  $\gamma_{11}$  para la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

**Fuente:** Elaboración propia.

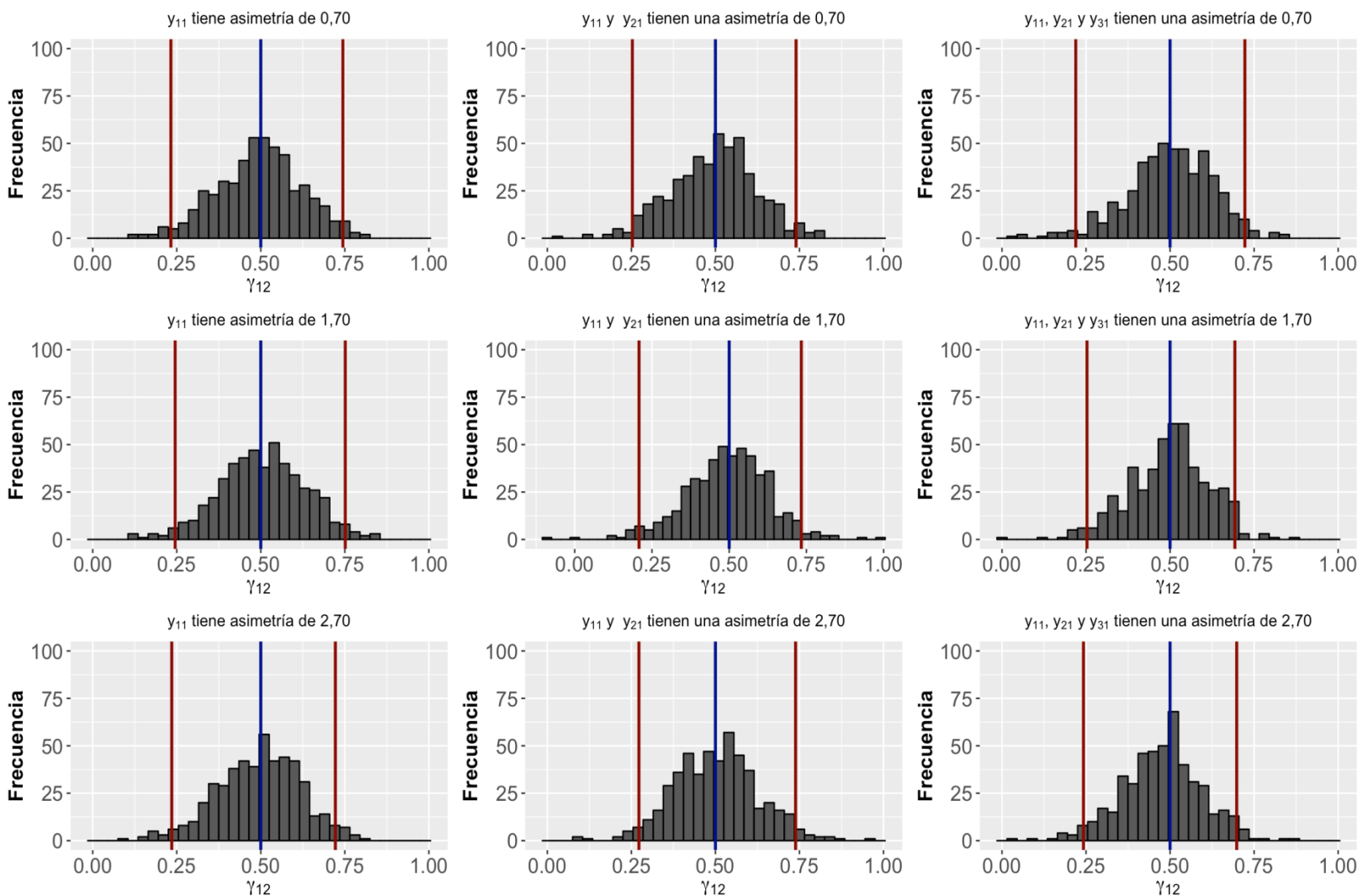


Figura 10 Distribución del coeficiente  $\gamma_{12}$  basada en 500 iteraciones del modelo de simulación y tamaño de muestra de 100 para cada escenario de simulación

1/ La línea azul es el valor 0,50 con el que se fijó  $\gamma_{12}$  para la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

**Fuente:** Elaboración propia.

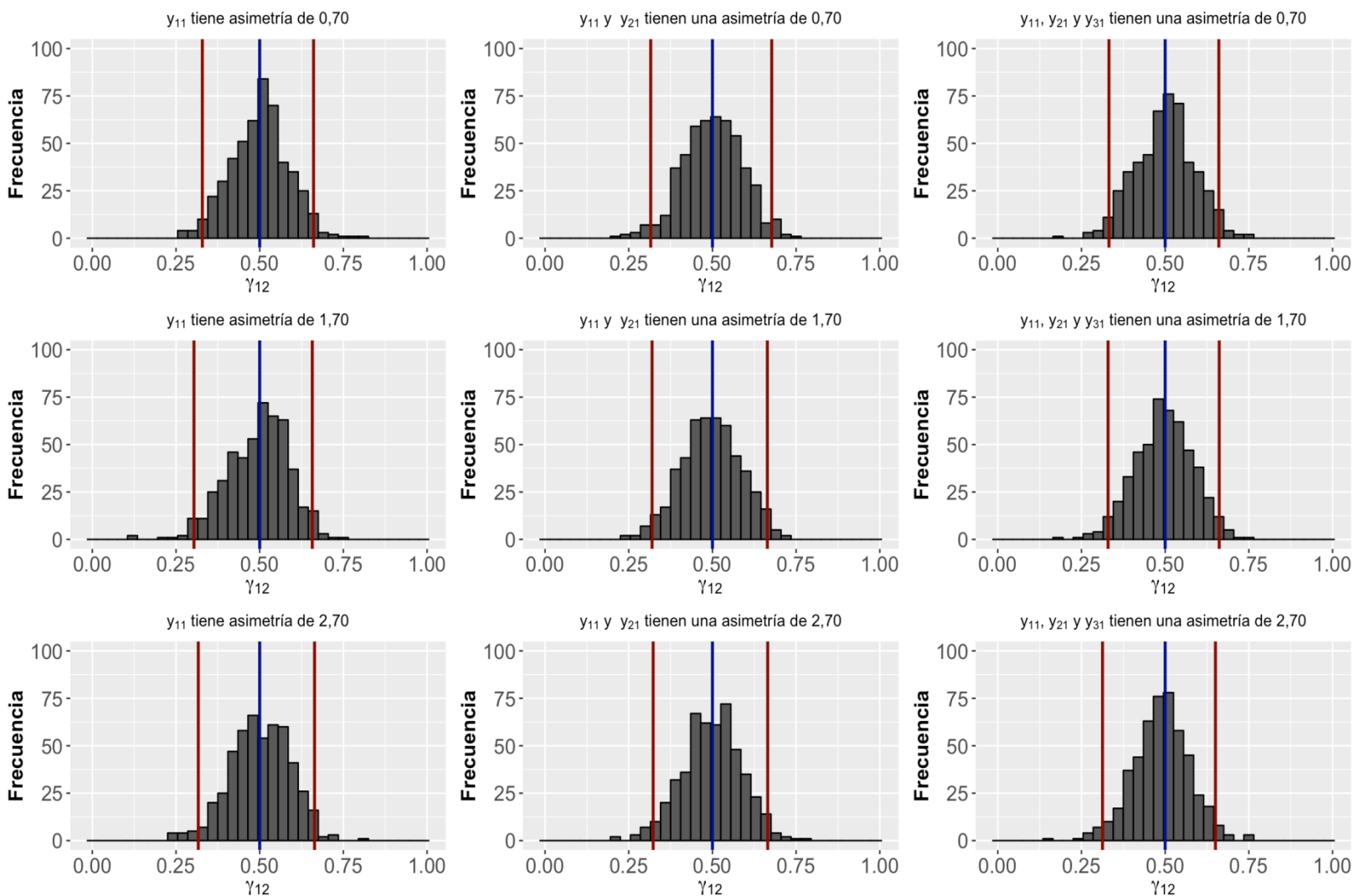


Figura 11 Distribución del coeficiente  $\gamma_{12}$  según las 500 iteraciones del modelo de simulación y tamaño de muestra de 200 para cada escenario de simulación

1/ La línea azul es el valor 0,50 con el que se fijó  $\gamma_{12}$  para la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

**Fuente:** Elaboración propia.

### 4.3 Resultados sobre los estadísticos de bondad de ajuste

En esta sección se presentan los resultados obtenidos sobre los 18 escenarios de simulación para los estadísticos de bondad de ajuste propuestos para evaluar la calidad de los modelos de ecuaciones estructurales, ante las distintas condiciones establecidas en el plan de simulación.

La presentación de los resultados mantiene el formato de las dos subsecciones presentadas previamente en este capítulo. Para cada estadístico de bondad de ajuste se presenta un conjunto de histogramas de la distribución de este, dado el cumplimiento del supuesto de normalidad multivariante (para 100 y 200 observaciones).

Además, se presentan la media, la desviación estándar y los percentiles 2,5 y 97,5 de cada una de las distribuciones de los estadísticos ante las variaciones de asimetría positiva en las parcelas, número de parcelas con dicha asimetría y tamaño de muestra. Por otro lado, se presentan matrices de histogramas que muestran las distribuciones de los estadísticos ante las variaciones de las condiciones mencionadas.

Con respecto al RMSEA, es pertinente recordar que valores de este inferiores a 0,06 son considerados óptimos e indican un buen ajuste del modelo planteado (Hu y Bentler, 1998). En la figura 12 se presenta la distribución de dicha medida cuando todas las parcelas cumplen con el supuesto de normalidad multivariada.

Se evidencia que para ambos tamaños de muestra, una importante mayoría de las iteraciones realizadas tienen un RMSEA menor o igual a 0,06. Es decir, que cuando se cumple el supuesto de normalidad, la mayoría de modelos tienen un buen ajuste. Además, evidentemente la distribución de muestreo de RMSEA es asimétrica positiva.

En el cuadro 6 se muestra que la media de la distribución del RMSEA para 100 observaciones es igual a 0,022 y la desviación estándar es igual a 0,027. En ese sentido, el sesgo más grande que se presenta para RMSEA con dicho tamaño



de muestra es igual a 0,007 (con asimetría de 2,70 en las tres parcelas). En el caso de la desviación estándar, el sesgo más grande es igual a 0,003.

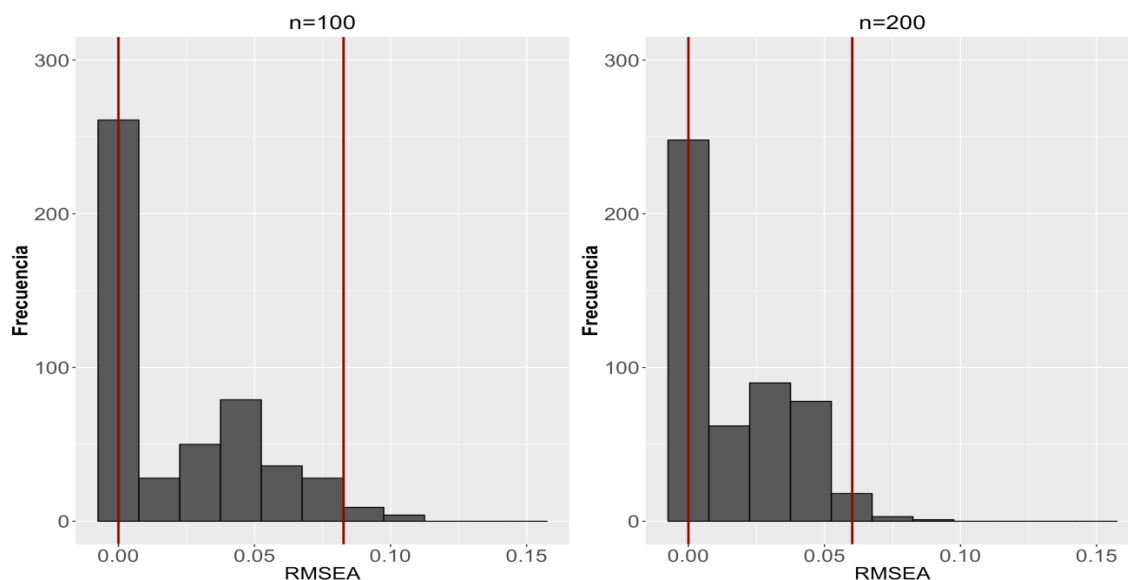


Figura 12 Distribución de la medida de bondad de ajuste RMSEA, basada en las 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es igual a 100 y a 200 y una distribución multinormal en las parcelas, con los percentiles 2,5 y 97,5

**Fuente:** Elaboración propia.

Con 200 observaciones, en el caso control, la media de la distribución de RMSEA con parcelas simétricas es igual a 0,017, con una desviación estándar de 0,020. Para este caso, el sesgo más grande del RMSEA es igual a 0,004, mientras que en el caso de la desviación estándar el sesgo más grande es igual a 0,002.

Estos resultados permiten concluir que las distribuciones del RMSEA con 200 observaciones presentan menor variación. Aunado a esto, con dicho  $n$  (dado los tamaños de los percentiles y las desviaciones estándar) hay menor probabilidad de que los modelos tengan RMSEA mayores a 0,06. Es decir, que hay menor probabilidad de que el modelo tenga mal ajuste con 200 observaciones que con 100 observaciones.

Ahora bien, a nivel general pese a los sesgos que ya se discutieron sobre las estimaciones de las cargas factoriales y los coeficientes del modelo estructural, dada la presencia de asimetría, el RMSEA indica que ante todos los escenarios de simulación hay buen ajuste en los diversos modelos simulados.

Cuadro 6 Media, desviación estándar, percentiles 2,5 y 97,5 de las estimaciones de RMSEA, en las 500 iteraciones para cada escenario de simulación

Escenario de simulación		RMSEA			
Variables medibles modificadas	Nivel de asimetría				
		$\bar{x}$	s	P <sub>2,5</sub>	P <sub>97,5</sub>
n=100					
Control	0	0,022	0,027	0,000	0,083
y1	0,7	0,025	0,029	0,000	0,088
y1	1,7	0,025	0,028	0,000	0,083
y1	2,7	0,025	0,028	0,000	0,083
y1, y2	0,7	0,024	0,028	0,000	0,082
y1, y2	1,7	0,027	0,030	0,000	0,091
y1, y2	2,7	0,026	0,028	0,000	0,084
y1, y2, y3	0,7	0,028	0,029	0,000	0,092
y1, y2, y3	1,7	0,026	0,028	0,000	0,083
y1, y2, y3	2,7	0,029	0,030	0,000	0,086
n=200					
Control	0	0,017	0,020	0,000	0,060
y1	0,7	0,015	0,019	0,000	0,055
y1	1,7	0,016	0,019	0,000	0,057
y1	2,7	0,015	0,019	0,000	0,056
y1, y2	0,7	0,016	0,019	0,000	0,057
y1, y2	1,7	0,018	0,020	0,000	0,059
y1, y2	2,7	0,018	0,020	0,000	0,061
y1, y2, y3	0,7	0,017	0,019	0,000	0,056
y1, y2, y3	1,7	0,018	0,021	0,000	0,061
y1, y2, y3	2,7	0,021	0,022	0,000	0,064

Fuente: Elaboración propia.

En las figuras 13 y 14 se presentan las matrices de histogramas que muestran las distribuciones de RMSEA en los diversos escenarios de simulación. Dichos histogramas muestran lo esperado tanto para las simulaciones con 100 observaciones como para 200, que son similares entre sí, tomando en cuenta la información expuesta en el cuadro 5. Además, se visualiza que, para un tamaño de muestra de 200, las distribuciones presentan menos variación.

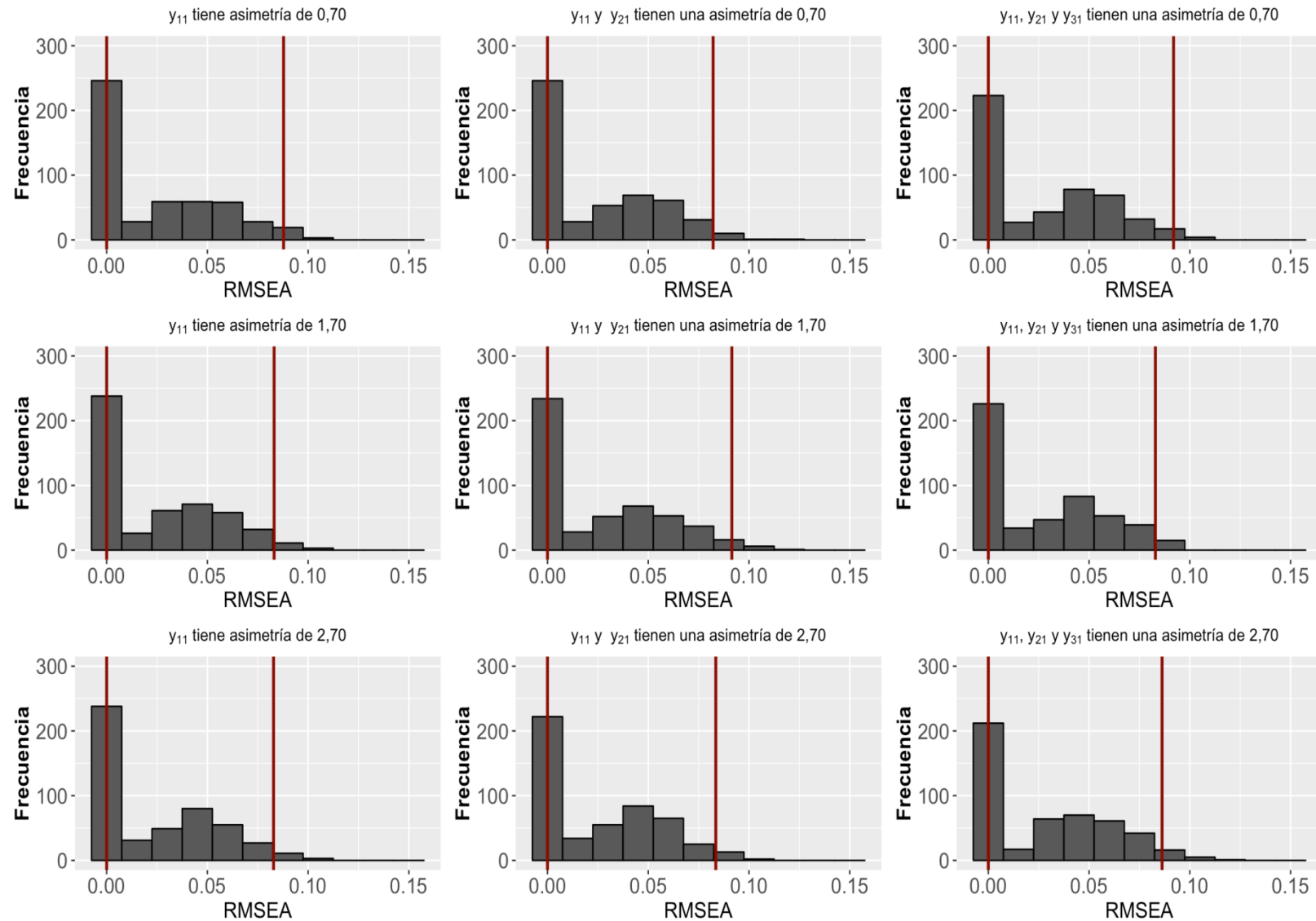


Figura 13 Distribución de RMSEA, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación, con los percentiles 2,5 y 97,5

**Fuente:** Elaboración propia.

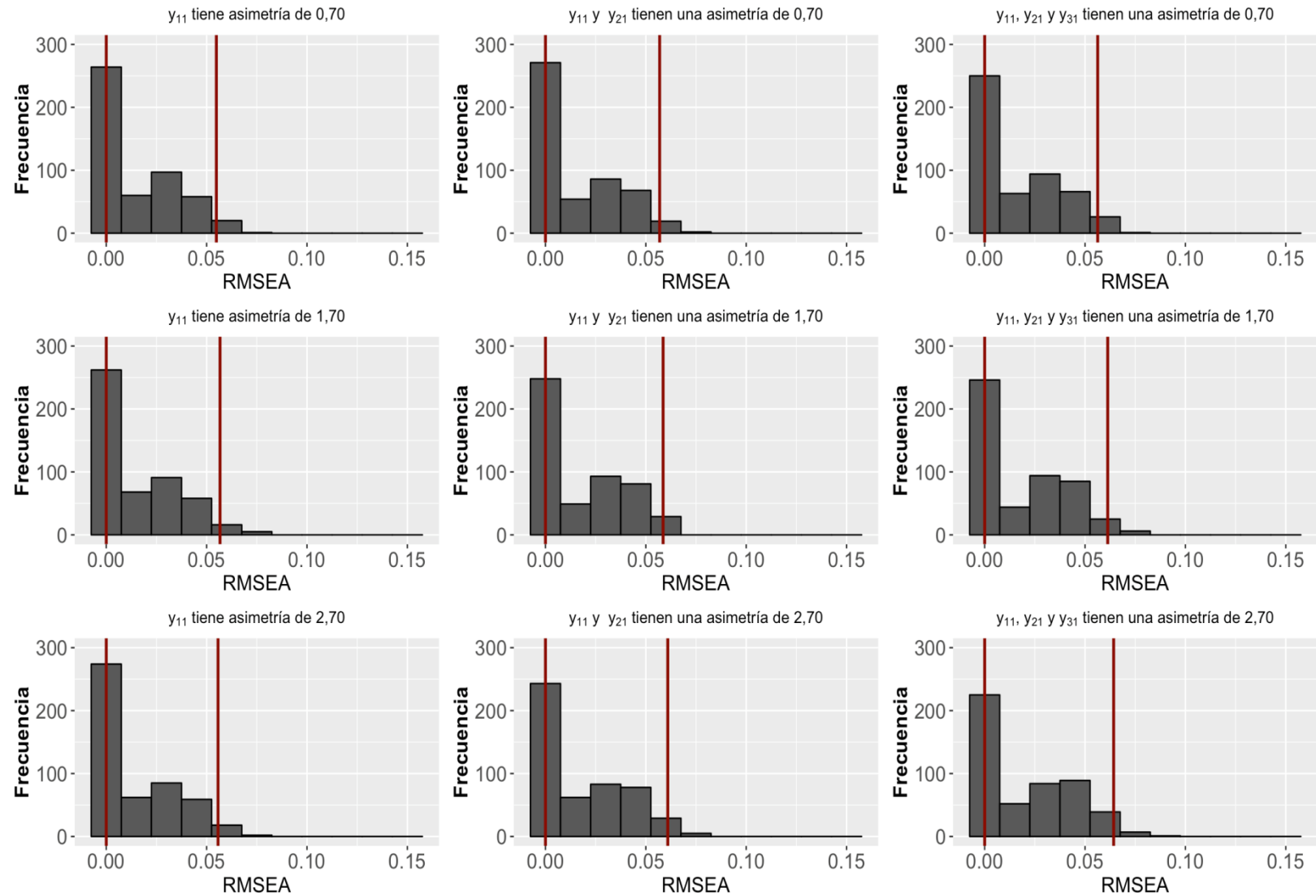


Figura 14 Distribución de RMSEA, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación, con los percentiles 2,5 y 97,5

**Fuente:** Elaboración propia.

El segundo estadístico de bondad de ajuste que fue calculado durante las simulaciones fue el SRMR. Los valores para dicho estadístico oscilan entre 0,0 y 1,0 y los modelos bien ajustados obtienen valores inferiores a 0,05. Sin embargo, valores tan altos como 0,08 se consideran aceptables.

En la figura 15 se muestran los histogramas de las distribución de SRMR en los escenarios de simulación control con los dos tamaños de muestra estudiados. Dichas distribuciones muestran que de todas las iteraciones de los modelos con 100 y 200 observaciones se obtuvieron valores aceptables para SRMR, donde en el caso del último tamaño de muestra los valores tienden a ser más pequeños.

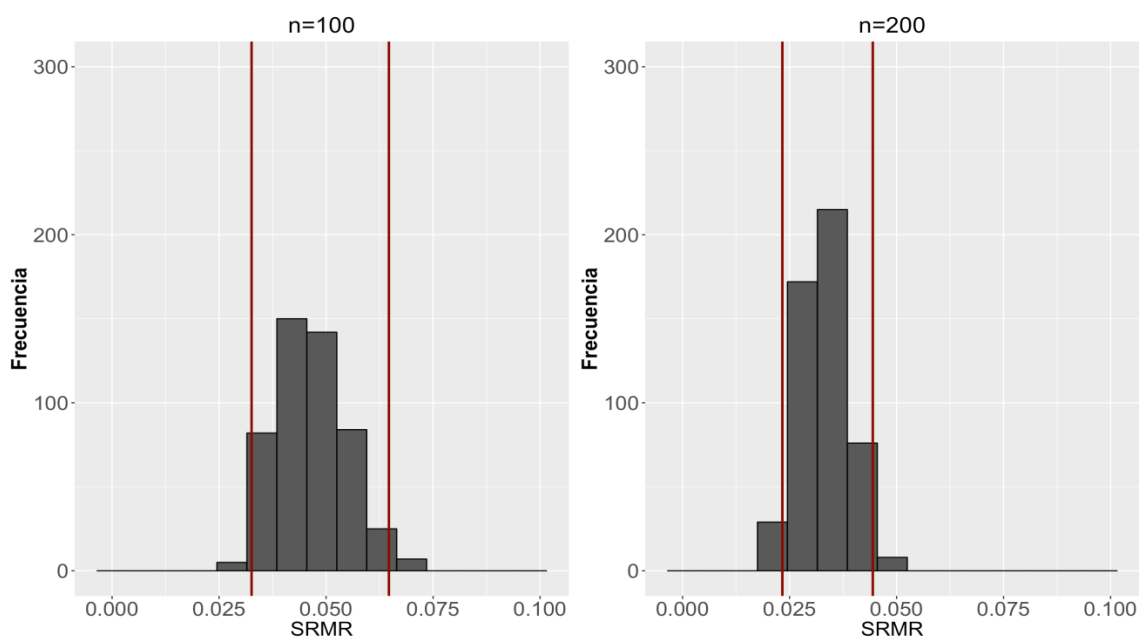


Figura 15 Distribución de la medida de bondad de ajuste SRMR, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es igual a 100 y a 200 y con hay distribución multinormal en las parcelas, con los percentiles 2,5 y 97,5

**Fuente:** Elaboración propia.

El cuadro 7 muestra que la media de la distribución del SRMR para 100 observaciones es igual a 0,046 cuando las parcelas poseen distribuciones normales, con una desviación estándar de 0,008. Con este tamaño de muestra el sesgo de mayor magnitud para SRMR es igual a 0,002, mientras que el sesgo de mayor magnitud en la desviación estándar es de 0,001.

Con 200 observaciones, cuando no hay asimetría en las variables indicadoras, el promedio de la distribución de SRMR es de 0,033 y la desviación estándar es igual a 0,006. En este caso, el máximo sesgo de SRMR es igual a 0,001, mientras que el máximo sesgo en la desviación estándar de SRMR es de 0,001.

Cuadro 7 Media, desviación estándar, percentiles 2,5 y 97,5 de las estimaciones de SRMR, en las 500 iteraciones para cada escenario de simulación

Escenario de simulación		SRMR			
Variables medibles modificadas	Nivel de asimetría				
		$\bar{x}$	s	P <sub>2,5</sub>	P <sub>97,5</sub>
n=100					
Control	0	0,046	0,008	0,033	0,065
y1	0,7	0,046	0,009	0,030	0,065
y1	1,7	0,046	0,008	0,031	0,064
y1	2,7	0,047	0,008	0,032	0,064
y1, y2	0,7	0,046	0,008	0,033	0,063
y1, y2	1,7	0,047	0,009	0,032	0,067
y1, y2	2,7	0,047	0,008	0,032	0,063
y1, y2, y3	0,7	0,047	0,008	0,033	0,065
y1, y2, y3	1,7	0,046	0,008	0,030	0,065
y1, y2, y3	2,7	0,048	0,008	0,033	0,065
n=200					
Control	0	0,033	0,006	0,023	0,044
y1	0,7	0,033	0,005	0,023	0,044
y1	1,7	0,033	0,005	0,023	0,044
y1	2,7	0,032	0,005	0,023	0,043
y1, y2	0,7	0,033	0,006	0,023	0,045
y1, y2	1,7	0,033	0,005	0,023	0,044
y1, y2	2,7	0,033	0,006	0,024	0,046
y1, y2, y3	0,7	0,033	0,005	0,023	0,043
y1, y2, y3	1,7	0,033	0,006	0,023	0,046
y1, y2, y3	2,7	0,034	0,006	0,023	0,046

Fuente: Elaboración propia.

Se puede destacar que ambos tamaños de muestra presentan sesgos insignificantes a nivel práctico, tanto en las medias del SRMR como en sus respectivas desviaciones estándar. Asimismo, tomando en cuenta los valores que presentan en promedio los SRMR en las distribuciones obtenidas a partir de los 18 escenarios de simulación, se puede concluir que las asimetrías planteadas en las variables medibles no generan mayores sesgos en dicho estadístico de bondad de ajuste. Aunado a esto, cabe mencionar que los promedios de los SRMR obtenidos por cada distribución permiten siempre concluir que el modelo posee un buen ajuste.

En las figuras 16 y 17 se presentan las matrices de los histogramas de las distribuciones del SRMR en los escenarios de simulación planteados para 100 y 200 observaciones en la muestra de cada modelo en las quinientas repeticiones. En general, se puede observar que los histogramas tienden hacia una distribución normal en los 18 histogramas. Además, más del 95% de las repeticiones de los modelos simulados obtienen valores del SRMR satisfactorios, para 100 observaciones, mientras que, cuando las simulaciones se realizan con 200 observaciones, todas las iteraciones presentan un modelo con buen ajuste.

Al visualizar los histogramas, se puede concluir que estos son muy similares entre sí, según tamaño de muestra. Sin embargo, se puede notar que cuanto más aumente la magnitud de la asimetría positiva, se ve un ligero alargamiento de la cola derecha de los histogramas, lo cual explica el crecimiento de la desviación estándar según el aumento de la asimetría, tal como lo muestra el cuadro 7.

Lo relevante sobre el alargamiento de la cola derecha en los histogramas al aumentar la asimetría, es que solo para tamaños de muestra de 100 observaciones dicha cola llega a tomar valores de SRMR mayores a 0,08. Ahora, no se puede considerar que eso sea un caso que se deba a la asimetría positiva en las parcelas, pues ese patrón se mantiene para el histograma del caso control para ese tamaño de muestra.

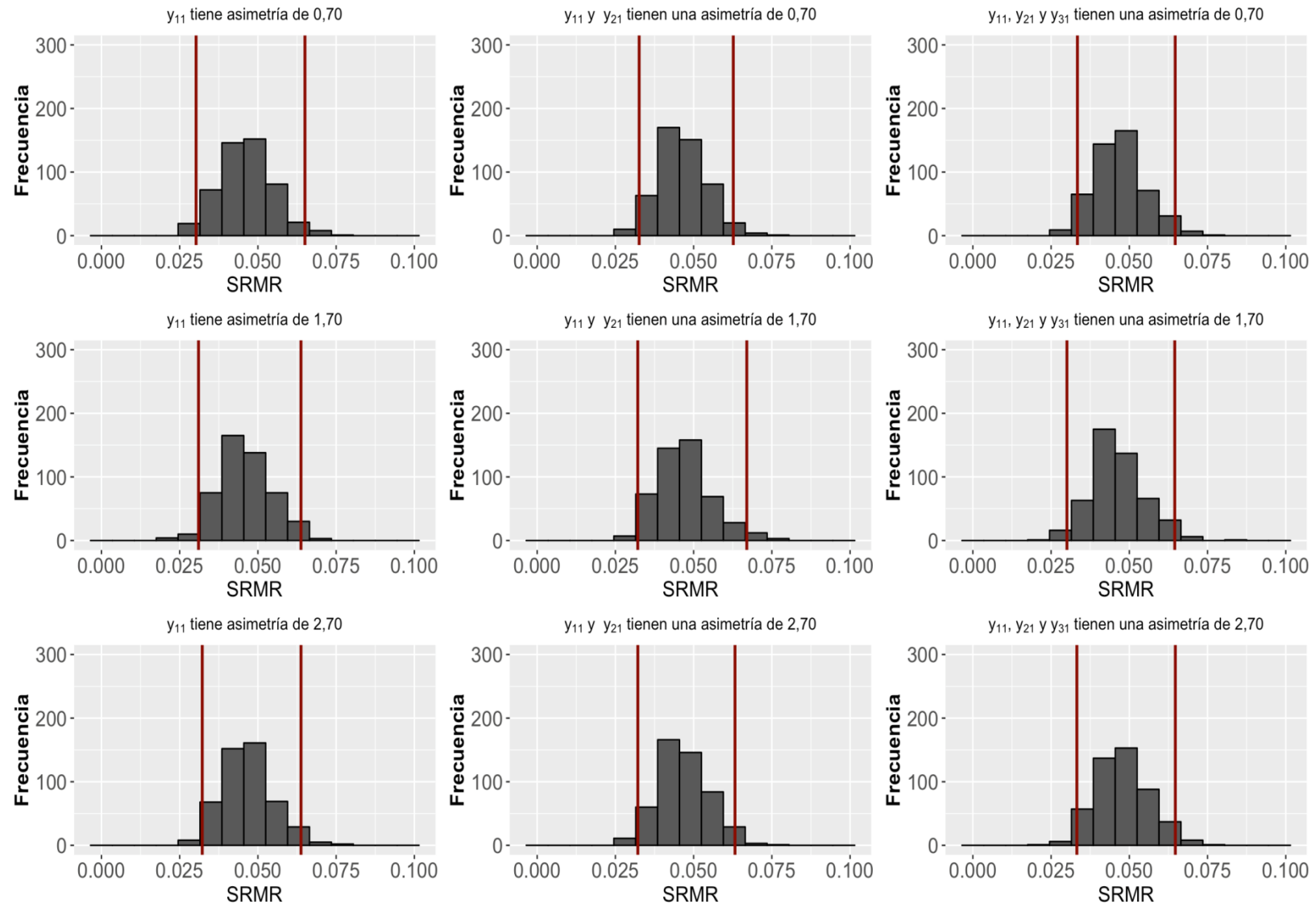


Figura 16 Distribución de SRMR, basada en las 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación, con los percentiles 2,5 y 97,5

**Fuente:** Elaboración propia.



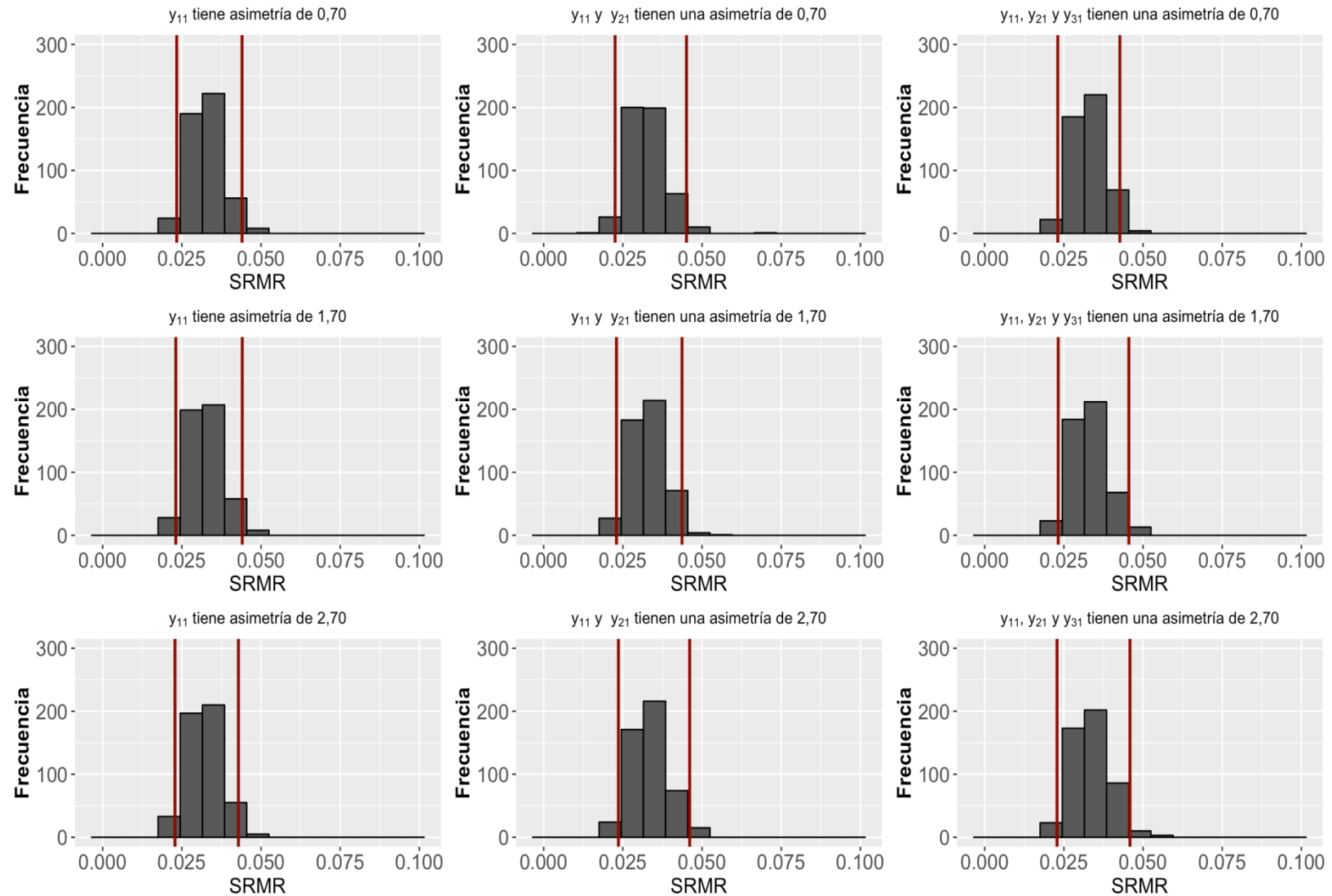


Figura 17 Distribución de SRMR, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación, con los percentiles 2,5 y 97,5

**Fuente:** Elaboración propia.

En el caso del GFI, es importante recordar que, según este estadístico, el modelo es aceptable cuando su valor es mayor a 0,90 (Hu y Benter, 1998 y 1999). En la figura 18 se presenta la distribución del GFI según las 500 iteraciones del modelo de simulación para el caso en el cual se cumple con el supuesto de distribución de las variables medibles.

Dicho gráfico muestra un patrón similar al estudiado para los casos control del SRMR. En ambos histogramas, todas las iteraciones de los modelos poseen un ajuste satisfactorio pues son mayores a 0,90 (ello ante una interpretación conservadora del GFI). Además, tanto el histograma para simulaciones con tamaños de muestra de 100 observaciones como el de 200 observaciones presentan una distribución que tiende a la normalidad, pero el último  $n$  presenta una variabilidad menor.

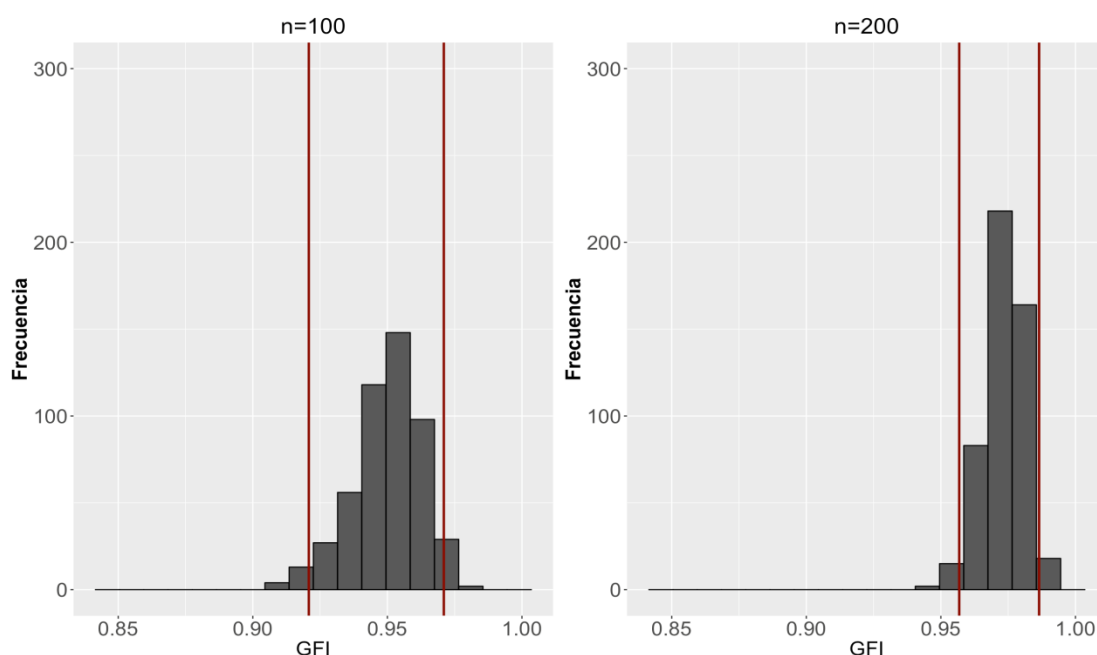


Figura 18 Distribución de la medida de bondad de ajuste GFI, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es igual a 100 y a 200 y con hay distribución multinormal en las parcelas, con los percentiles 2,5 y 97,5

**Fuente:** Elaboración propia.

El histograma de la distribución del GFI con un tamaño de muestra de 100 observaciones para el caso control (en la figura 18) tiene una media de 0,950 con

una desviación estándar es igual a 0,013. Al analizar el cuadro 8, las distribuciones de dicho estadístico con el mismo tamaño de muestra, el sesgo más grande es de -0,003 en el promedio del GFI y de 0,001 en la desviación estándar.

Cuadro 8 Media, desviación estándar, percentiles 2,5 y 97,5 de las estimaciones de GFI, en las 500 iteraciones para cada escenario de simulación

Escenario de simulación		GFI			
Variables medibles modificadas	Nivel de asimetría				
		$\bar{x}$	s	P <sub>2,5</sub>	P <sub>97,5</sub>
n=100					
Control	0	0,950	0,013	0,921	0,971
y1	0,7	0,950	0,014	0,919	0,974
y1	1,7	0,950	0,014	0,924	0,974
y1	2,7	0,949	0,013	0,922	0,972
y1, y2	0,7	0,950	0,013	0,921	0,974
y1, y2	1,7	0,948	0,014	0,915	0,970
y1, y2	2,7	0,949	0,013	0,919	0,973
y1, y2, y3	0,7	0,948	0,014	0,915	0,971
y1, y2, y3	1,7	0,949	0,014	0,921	0,974
y1, y2, y3	2,7	0,947	0,014	0,917	0,971
n=200					
Control	0	0,974	0,007	0,957	0,986
y1	0,7	0,974	0,007	0,960	0,986
y1	1,7	0,974	0,007	0,959	0,986
y1	2,7	0,974	0,007	0,959	0,986
y1, y2	0,7	0,974	0,008	0,958	0,986
y1, y2	1,7	0,974	0,007	0,958	0,986
y1, y2	2,7	0,973	0,008	0,958	0,986
y1, y2, y3	0,7	0,974	0,007	0,959	0,987
y1, y2, y3	1,7	0,973	0,008	0,956	0,986
y1, y2, y3	2,7	0,972	0,008	0,954	0,986

**Fuente:** Elaboración propia

Para las simulaciones con 200 observaciones en cada una de las repeticiones de la estimación del modelo estructural, en el escenario control donde hay normalidad en las parcelas del modelo, la media de la distribución del GFI es

igual a 0,974, con una desviación estándar igual a 0,007. Al analizar las distribuciones de dicho estadístico en los nueve escenarios de simulación con dicho tamaño de muestra, el sesgo más grande es de -0,002 en el promedio del GFI y de 0,001 en la desviación estándar.

Las matrices de histogramas de las distribuciones de GFI para los 18 escenarios de simulación se presenta en las figuras 19 y 20. Los 18 histogramas presentados muestran una distribución normal para los GFI. Sin embargo, cabe destacar que, ante el aumento de la magnitud de la asimetría en las variables medibles y el número de parcelas con este comportamiento para la variable endógena, hay una ligera tendencia a la asimetría negativa en las distribuciones de dicho estadístico.

Los histogramas de la distribución de esta medida de bondad de ajuste repiten el mismo patrón del SMRM. Este patrón se refiere al hecho de que cuando los modelos son estimados con muestras de 200, no se observan posibles valores de GFI menores a 0,90 que indiquen mal ajuste de los modelos.

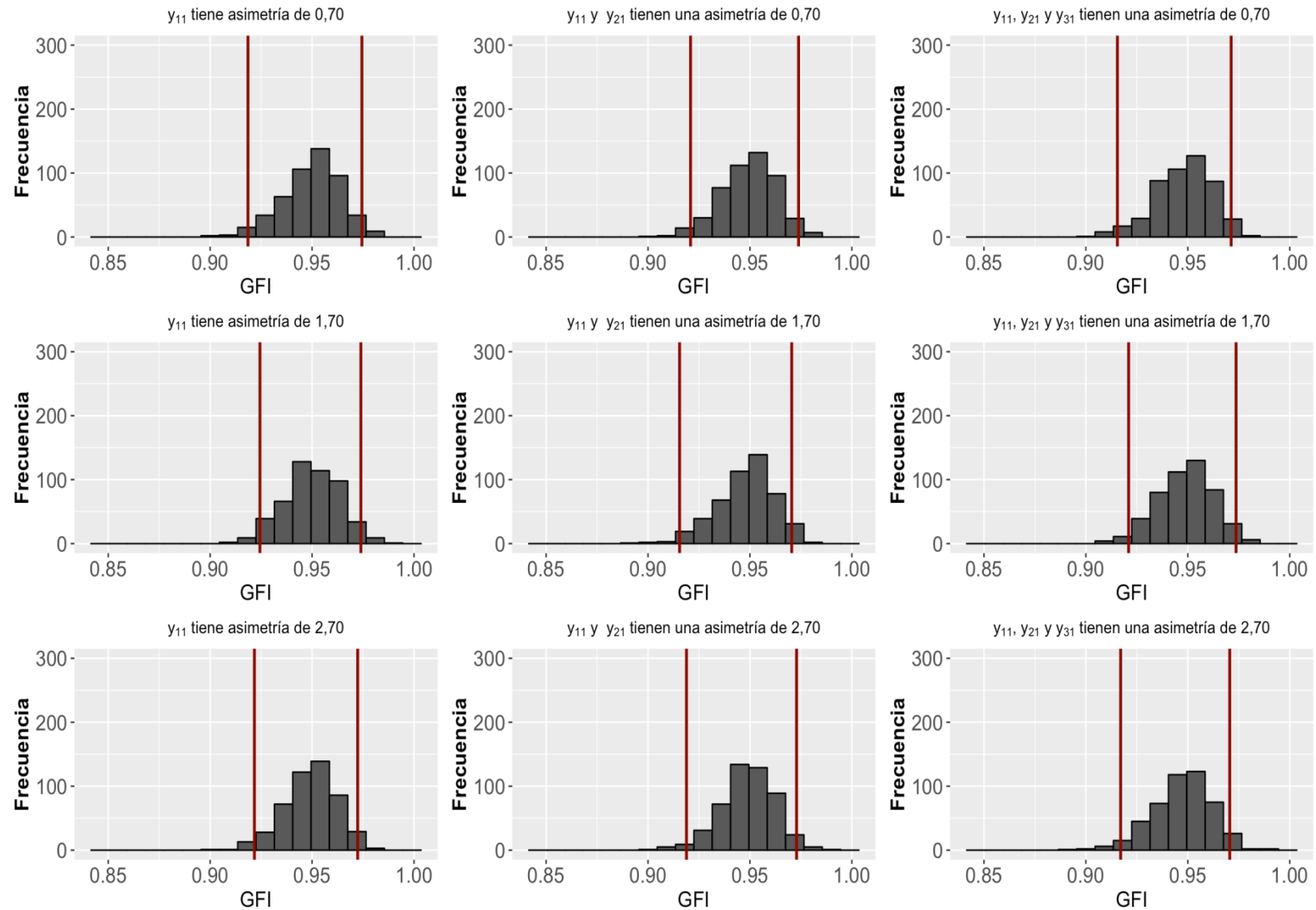


Figura 19 Distribución de GFI, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación, con los percentiles 2,5 y 97,5

**Fuente:** Elaboración propia.

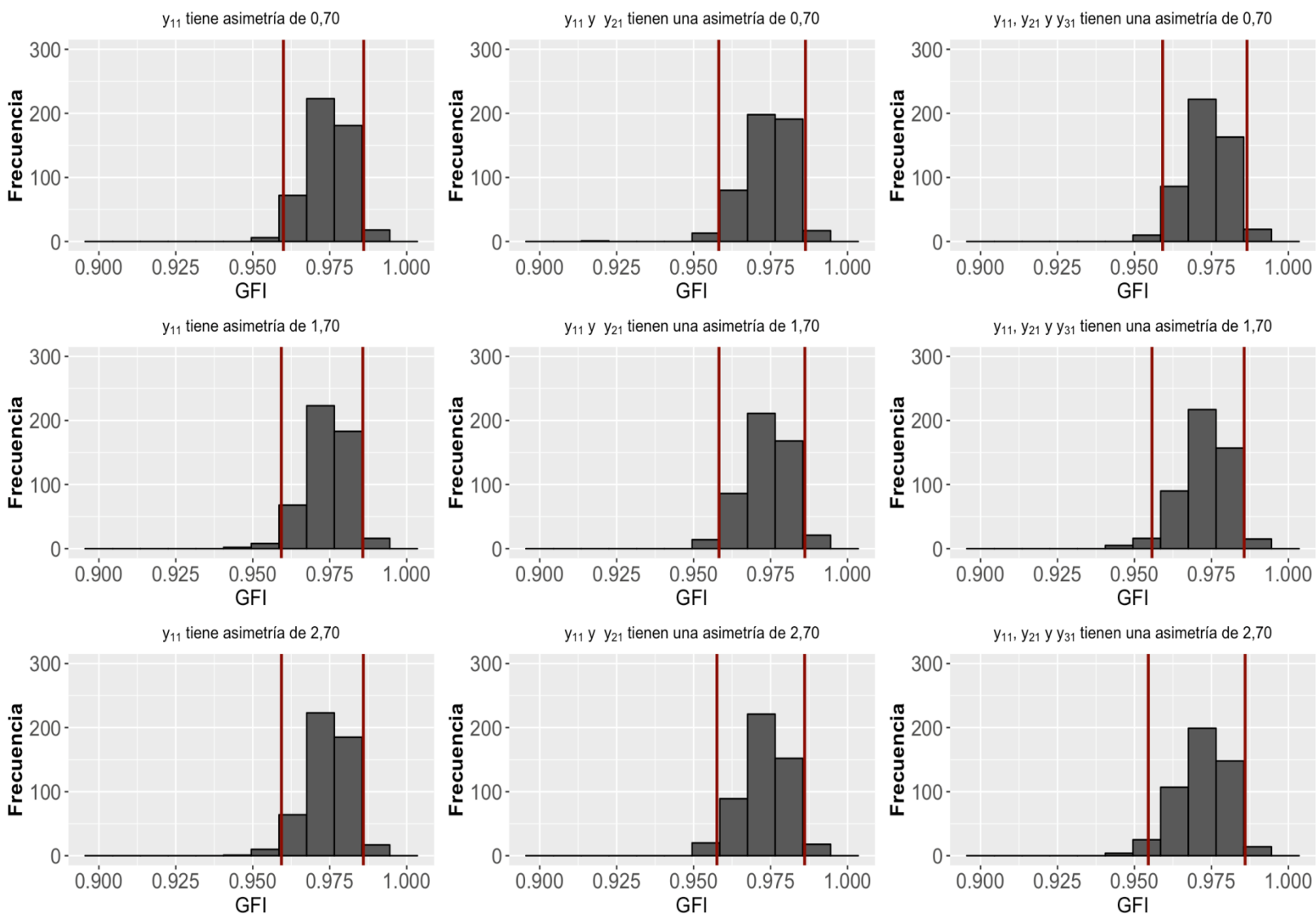


Figura 20 Distribución de GFI, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación, con los percentiles 2,5 y 97,5

**Fuente:** Elaboración propia.

La última medida de bondad de ajuste estudiada fue el estadístico chi-cuadrado. Es importante recordar que el modelo de simulación planteado posee una variable endógena y dos variables exógenas, donde cada una de estas variables posee tres parcelas. Esto se traduce en que el estadístico chi-cuadrado posee 24 grados de libertad en todos los modelos simulados.

Cuando el estadístico chi-cuadrado es menor a 36,42 con 24 grados de libertad, con un nivel de significancia de 5%, no se rechaza la hipótesis nula de que el modelo estimado posee un buen ajuste. De manera que se esperaría que las distribuciones del estadístico chi-cuadrado tenga como valores promedios números menores o iguales a 36,42.

En la figura 21 se presentan los histogramas de la distribución de chi-cuadrado cuando en el modelo de simulación se cumple con el supuesto de normalidad en las parcelas de este. En ambos histogramas se puede notar que, pese a que hay cierta tendencia a la normalidad en ambas distribuciones, la cola derecha de ambos está más alargada. Sin embargo, cabe destacar que una importante mayoría de las 500 repeticiones para los dos tamaños de muestra del plan de simulación poseen valores satisfactorios del estadístico en cuestión.

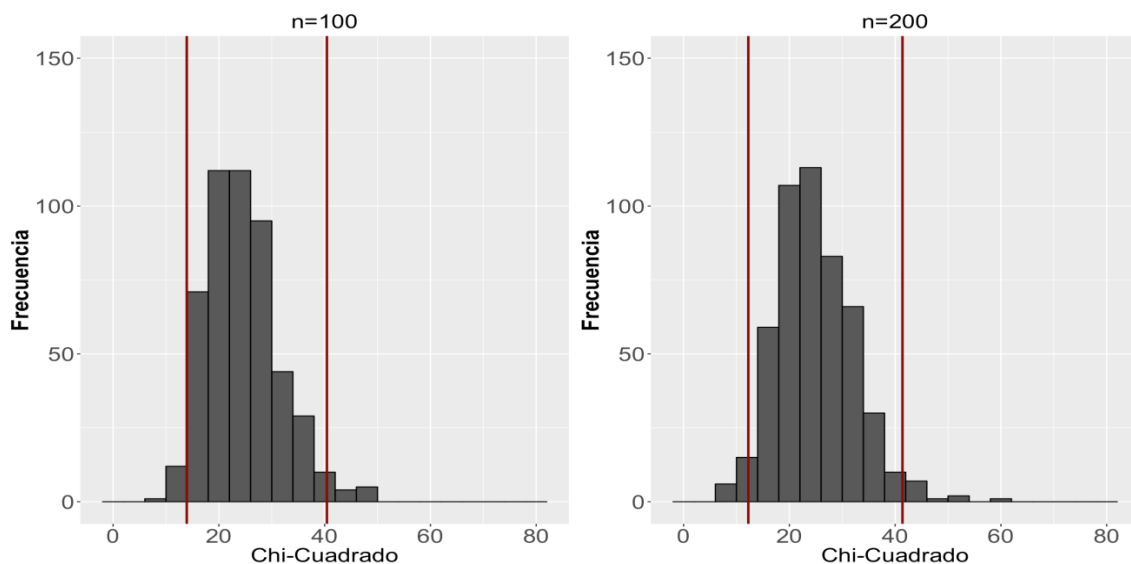


Figura 21 Distribución de la medida de bondad de ajuste chi-cuadrado, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es igual a 100 y a 200 y no hay asimetría en las variables medibles, con los percentiles 2,5 y 97,5

**Fuente:** Elaboración propia

El cuadro 9 presenta la media, la desviación estándar y los percentiles 2,5 y 97,5 de las distribuciones del estadístico chi-cuadrado ante los diversos escenarios de simulación. La media de la distribución de chi-cuadrado para las 500 simulaciones con tamaños de muestra iguales a 100 es igual a 24,65, y la desviación es igual a 6,83. En los nueve escenarios de simulación con ese mismo tamaño de muestra, el sesgo más grande en la media del estadístico en cuestión es igual a 1,63, mientras que en la desviación estándar ese sesgo es igual a 0,9.

Cuadro 9 Media, desviación estándar, percentiles 2,5 y 97,5 del estadístico chi-cuadrado estimadas en las 500 iteraciones para cada escenario de simulación

Escenario de simulación		Chi-cuadrado			
Variables medibles modificadas	Nivel de asimetría				
		$\bar{x}$	s	P <sub>2,5</sub>	P <sub>97,5</sub>
n=100					
Control	0	24,65	6,83	13,93	40,42
y1	0,7	25,22	7,53	13,03	42,51
y1	1,7	25,09	7,23	13,41	40,58
y1	2,7	25,12	6,88	13,41	40,46
y1, y2	0,7	25,00	7,09	13,70	40,22
y1, y2	1,7	25,85	7,73	13,89	44,09
y1, y2	2,7	25,60	6,91	14,12	41,41
y1, y2, y3	0,7	25,84	7,47	13,41	44,28
y1, y2, y3	1,7	25,31	7,27	12,37	40,50
y1, y2, y3	2,7	26,28	7,68	14,05	41,84
n=200					
Control	0	24,93	7,33	12,24	41,39
y1	0,7	24,29	6,61	12,74	38,44
y1	1,7	24,38	6,89	13,40	39,41
y1	2,7	24,13	6,75	13,07	38,88
y1, y2	0,7	24,36	6,86	12,45	39,53
y1, y2	1,7	24,96	7,23	12,66	40,48
y1, y2	2,7	25,13	7,42	12,70	41,81
y1, y2, y3	0,7	24,76	6,86	12,41	39,21
y1, y2, y3	1,7	25,42	7,54	13,14	42,03
y1, y2, y3	2,7	26,26	8,02	13,10	43,81

Fuente: Elaboración propia.



En el caso de las simulaciones con  $n$  igual a 200, en el caso control la media de la distribución de chi-cuadrado es igual a 24,93 y la desviación estándar es 7,33. Ambos valores, ligeramente más pequeños que los escenarios con 100 observaciones. El sesgo más grande de los nueve escenarios con 200 observaciones en la media de las distribuciones del estadístico en cuestión es igual a 1,33, mientras que el sesgo máximo para la desviación es igual a 0,69.

Las representación gráfica de las distribuciones de chi-cuadrado para los 18 escenarios de simulación se presentan en las figuras 22 y 23. Sobre estas matrices de histogramas se puede ver que las distribuciones tienen una ligera asimetría positiva, sin importar el tamaño de muestra. Es decir, las distribuciones poseen colas derechas más alargadas, pero, al analizar los histogramas en su conjunto (incluso los del escenario control), no se puede concluir que se deba a la magnitud de la asimetría en las parcelas de la variable endógena, debido a que los histogramas de los casos que cumplen con el requisito de la normalidad multivariante en las indicadoras también poseen esta característica.

En general, sobre las medidas de bondad de ajuste, se puede concluir que los resultados de la simulaciones sugieren que ajustar el modelo de simulación con un tamaño de muestra cercano a 200 observaciones cuando existe asimetría en las parcelas es una mejor decisión. Sin embargo, es notorio que el estadístico chi-cuadrado es el más volátil de las cuatro medidas estudiadas y que posee mayor probabilidad de concluir que el modelo tiene un ajuste inadecuado.

En ese sentido, se ha encontrado que cuantas más observaciones se tengan para estimar el modelo, es más probable que se obtengan RMSEA, SRMR, GFI y estadísticos chi-cuadrado que indiquen adecuadas bondades de ajuste en los modelos. Esto se puede concluir al estudiar los estadísticos descriptivos y los histogramas de los estadísticos expuestos anteriormente.

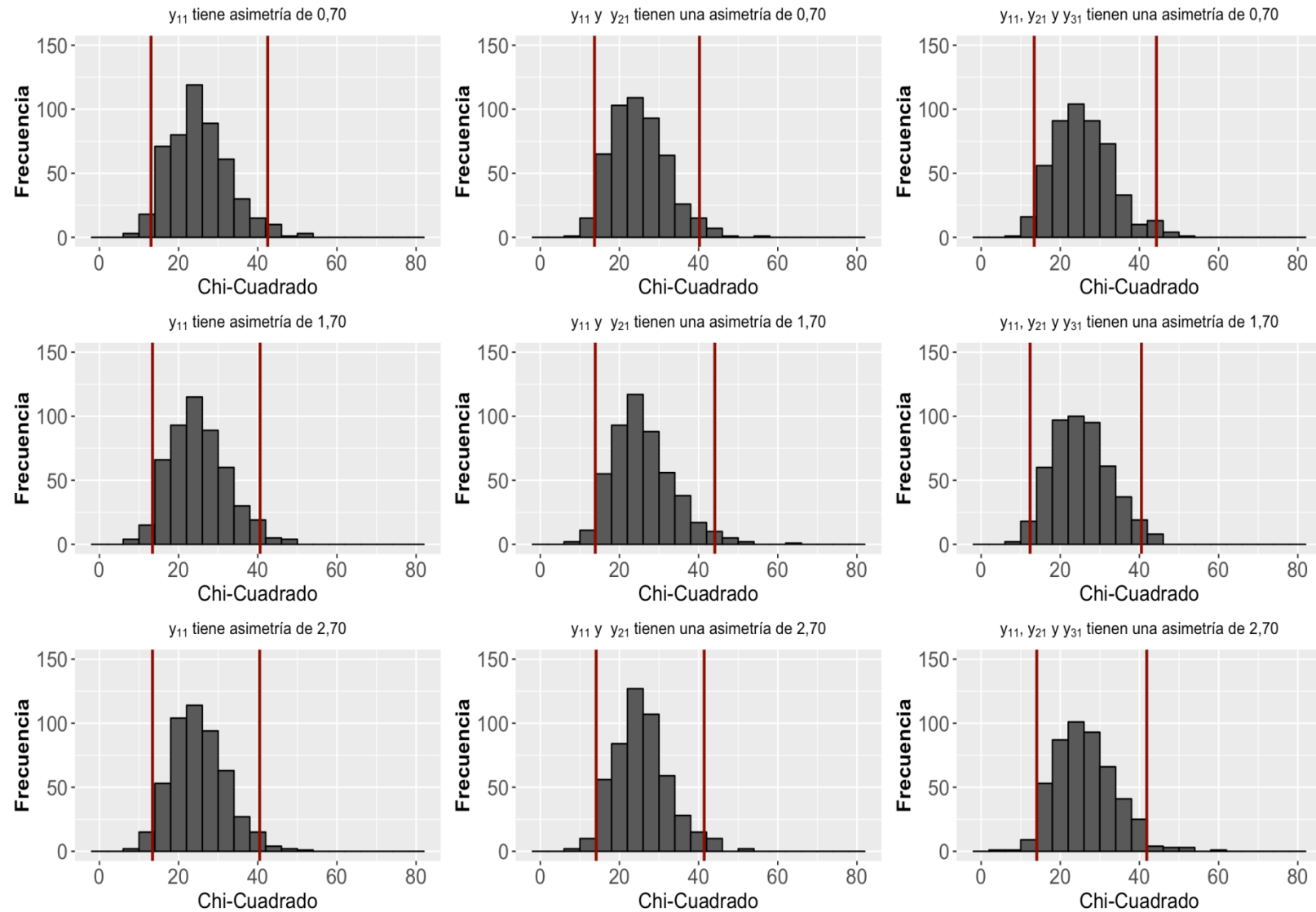


Figura 22 Distribución del estadístico chi-cuadrado, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación, con los percentiles 2,5 y 97,5

**Fuente:** Elaboración propia.

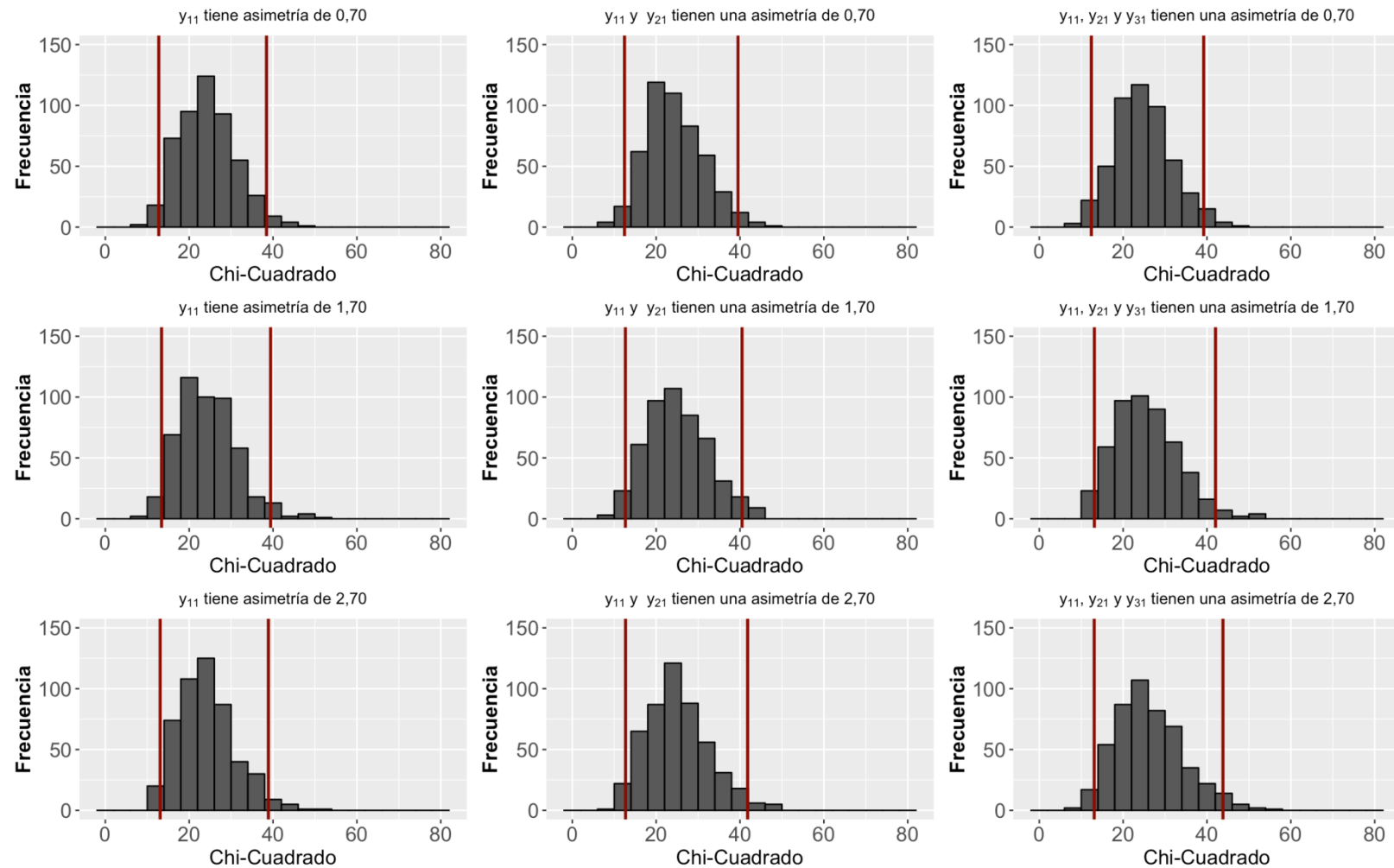


Figura 23 Distribución del estadístico chi-cuadrado, basada en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación con los percentiles 2,5 y 97,5

**Fuente:** Elaboración propia.

Es importante hacer un llamado de atención sobre esta subsección. Los hallazgos discutidos sobre los estadísticos de bondad de ajuste se han realizado evitando conclusiones sobre tendencias del comportamiento de los estadísticos conforme aumenta la magnitud de la asimetría positiva en las variables medibles. Ello se debe a que, en general, no hay evidencia de que los sesgos en las medias, desviaciones, percentiles 95 crezcan a medida que se aumenta la asimetría positiva en las parcelas de la variable endógena.

#### 4.4 Conclusiones

Luego de exponer los resultados obtenidos sobre las simulaciones ejecutadas según el plan de simulaciones propuesto en el capítulo anterior, es importante recordar que el alcance de estos es limitado al modelo de simulación planteado. Este modelo es estimado por máxima verosimilitud y consta de una variable endógena con dos variables exógenas, en el que cada una de estas tiene tres parcelas.

Además, es importante mencionar que la asimetría positiva solo fue aplicada en las parcelas de la variable endógena. Por tanto, las seis variables indicadoras de las variables exógenas cumplían con el supuesto de distribución multinormal que exige el método de estimación empleado.

A nivel general, el resultado que más destaca es que son las cargas factoriales de la variable endógena  $\lambda_{y11}$ ,  $\lambda_{y21}$ ,  $\lambda_{y31}$  los coeficientes que sufren mayores sesgos cuando la asimetría positiva en las correspondientes parcelas es mayor a 0,70 y menor o igual a 2,70.

Estos sesgos tomaron valores máximos de 0,01 o 0,02, lo cual se traduce en que la relación entre las parcelas y la variable endógena con el *constructo* que representan se debilita mínimamente. A nivel práctico el sesgo no es tan grande como para hacer concluir al analista que las variables indicadoras no representan adecuadamente el *constructo* con el que se está trabajando; es decir, la relación con costos se debilita y no desaparece o se diluye.

Con esto, lo que se quiere decir es que, cuando se tiene evidencia de varias investigaciones previas donde para un contexto en específico (ya sea un grupo social o contexto cultural), un conjunto de variables o una escala psicométrica representa adecuadamente un constructo, pese a la existencia de asimetría positiva entre 0,70 y 2,70 en la distribución de las tres parcelas de la variable endógena, las cargas factoriales obtenidas presentan un sesgo que reduce su relación con el *constructo*, pero no afecta las estimaciones restantes del modelo.

Se debe destacar que tampoco se afecta el desempeño a nivel empírico de la teoría que respalda el modelo en términos de los coeficientes de regresión. Lo anterior se apoya en el hecho de que tanto los coeficientes del modelo estructural como las cargas factoriales de las variables exógenas y las medidas de bondad de ajuste, no presentan sesgos importantes, que lleven a concluir que la asimetría positiva en las parcelas de la variable endógena afecte estas estimaciones de manera relevante a nivel práctico (cuando estas son realizadas con estimación por máxima verosimilitud).

Ahora bien, la estimación por máxima verosimilitud se muestra muy robusta a la asimetría igual a 0,70 en cualquiera de las variantes del resto de las condiciones de simulación (tamaño de muestra y número de parcelas asimétricas). Esto no solo para las cargas factoriales, sino, en general, para los coeficientes cuyos comportamientos fueron estudiados. Por tanto, con asimetrías positivas de esta magnitud (menores o iguales a 0,70), el uso de este método de estimación es muy satisfactorio.

Otro hallazgo obtenido con estas simulaciones es que las cargas factoriales que se ven afectadas por la asimetría, son las que tienen la parcela con incumplimiento del supuesto de distribución normal. Es decir, si de las tres parcelas de la variable latente solo una tiene asimetría, solo la carga correspondiente a esa parcela presentará sesgo, las restantes no.

Finalmente, sobre las medidas de bondad de ajuste RMSEA, GFI, SRMR y el estadístico chi-cuadrado, se puede señalar que es preferible estimar los modelos con 200 observaciones. Esto, debido a que las distribuciones de estos

estadísticos comprendían rangos de valores que indicaban ajustes satisfactorios o muy buenos del modelo en un 95% o más de las iteraciones de las simulaciones; esto, sin importar el número de parcelas asimétricas o el número de parcelas asimétricas de la variable endógena.

## **5. EL CASO EMPÍRICO: ASIMETRÍA POSITIVA EN EL MODELO DE ECUACIONES ESTRUCTURALES PARA LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL**

En este capítulo se realiza la aplicación de los hallazgos de las simulaciones a un caso empírico de un modelo de ecuaciones estructurales con una variable endógena y dos exógenas, en el que el supuesto de normalidad no se cumple en las variables observadas de la variable endógena. Ello, con el fin de mostrar la utilidad de los resultados del capítulo anterior e ilustrar cómo aplicarlos en casos de análisis empíricos.

El modelo que se estima busca analizar la relación entre las habilidades en visualización espacial y las habilidades cuantitativas, tomando en cuenta también el capital económico y cultural de estudiantes de la Universidad de Costa Rica (UCR). Lo anterior se lleva a cabo utilizando una muestra (no aleatoria) de estudiantes que realizaron la Prueba de Habilidades Cuantitativas (PHC) de la UCR en el 2016.

Tomando en cuenta lo anterior, este capítulo se segmenta en cuatro secciones, que se desarrollan a continuación: 1) presentación de la población de estudio y la muestra del caso empírico, 2) descripción del modelo de ecuaciones estructurales y las variables de este, 3) relación del modelo planteado con el estudio de simulación que se presenta en esta investigación, y 4) comparación de los resultados del modelo estimado por el método de máxima verosimilitud y el mismo modelo estimado con tres métodos robustos al incumplimiento del supuesto de multinormalidad en las parcelas y las conclusiones del caso en cuestión.

### **5.1 Población de estudio y muestra**

Como se menciona anteriormente, el modelo empírico que se estima en este capítulo se calcula a partir de los datos de un conjunto de estudiantes de la UCR que realizaron la Prueba de Habilidades Cuantitativas (PHC) en el 2016. Es

importante mencionar que esta prueba se ha aplicado desde el 2015 en dicha institución. La PHC es una prueba estandarizada de 40 ítems de selección única, que mide la habilidad para enfrentarse y resolver problemas matemáticos de aritmética, geometría, álgebra y análisis de datos, de personas que buscan ingresar a estudiar a ciertas carreras de este centro de estudios superiores.

De acuerdo con el *Marco teórico de la Prueba de Habilidades Cuantitativas (HC) de la Universidad de Costa Rica* del Instituto de Investigaciones Psicológicas de la Universidad de Costa Rica, dicha prueba nace en el marco de un objetivo del proyecto de investigación denominado “Construcción de pruebas específicas para ingreso a carrera” (Rojas, Ordóñez, Herrera y Mora, s.f.).

Este proyecto es originado en el acuerdo del Consejo Universitario de la sesión 4836 13-10-2003, el cual expresa que *“(la administración), con las unidades académicas y en coordinación con el Instituto de Investigaciones Psicológicas (IIP), analicen la pertinencia de incorporar pruebas particulares estandarizadas de ingreso a carrera, y se proporcione los recursos necesarios para realizar este propósito”* (Consejo Universitario, 2003).

Este acuerdo es la consecuencia de que algunas carreras arrastren problemas derivados del sistema de admisión a la Universidad; ello, debido a que *“varios de los programas de estudio de la UCR llenaban sus cupos con personas que deseaban trasladarse de carrera, lo cual no siempre era posible y traía como consecuencia el aumento de la deserción o bajas tasas de graduación (dado que varias carreras tenían porcentajes importantes de personas con perfiles de entrada lejanos a los esperados por las carreras). Como medida remedial para estas situaciones se consideró pertinente involucrar aspectos específicos de las carreras en el proceso de admisión a la UCR, lo cual posibilitaría que las personas que ingresaran a las carreras tuvieran las habilidades necesarias para desempeñarse exitosamente en las mismas (sic)”* (Rojas, Ordóñez, Herrera y Mora, s.f., p. 1).

Durante el desarrollo del proyecto de investigación mencionado, se observó que era necesario mejorar el proceso de selección en varias carreras que utilizaban



la matemática de forma considerable. Por lo tanto, se decidió elaborar una prueba que evaluara las habilidades necesarias para desempeñarse exitosamente en estas, entre las cuales destacaba el razonamiento cuantitativo, naciendo entonces la PHC (Rojas, Ordóñez, Herrera y Mora, s.f.).

Cuando se generó la prueba, los investigadores a cargo de la misma, tomaron como referente teórico a Dwyer, Gallagher, Levin y Morley (citado en Rojas, Ordóñez, Herrera y Mora, s.f.), quienes definen el razonamiento cuantitativo como la habilidad para analizar información cuantitativa y determinar cuáles destrezas y procedimientos pueden ser aplicados para obtener la solución de un problema particular o, simplemente, la habilidad para resolver problemas matemáticos (Dwyer *et al.*, 2003).

Lo anterior tiene como condición que estos problemas difieren sustancialmente de los procesos algorítmicos de la matemática, pues en esos problemas la parte algorítmica es solo un elemento dentro de la resolución. Entonces, dicho de otra manera, el razonamiento cuantitativo es la habilidad para resolver problemas matemáticos no procedimentales (citado en Rojas, Ordóñez, Herrera y Mora, s.f.)<sup>10</sup>.

Desde el 2015 y 2016 dicha prueba es obligatoria para ingresar a la licenciatura en Farmacia, el bachillerato y licenciatura en Química, el bachillerato en Física, el bachillerato y licenciatura en Meteorología, el bachillerato y licenciatura en Matemática, bachillerato y licenciatura en Ciencias Actuariales, y bachillerato en Estadística. En el 2017 se hizo obligatoria para ingresar a estudiar licenciatura en

---

<sup>10</sup> Los atributos propuestos para explicar la dificultad de la PHC fueron: niveles de deducción, inducción, visualización y comparación de cantidades que requiere el ítem para su resolución; cantidad de hipótesis, contenidos matemáticos, algoritmos algebraicos y algoritmos aritméticos que están presentes en el ítem; además si el ítem exige para su solución el planteamiento de alguna ecuación o el análisis de cada opción por separado (Rojas, 2013).

Aunado a lo anterior, la investigación de Álvarez, Molina y Salazar; la cual fue empleada para justificar la creación de la prueba, encontró cuáles habilidades eran necesarias para obtener éxito académico en la Universidad de Costa Rica. Parte de los elementos extraídos de dicha investigación fue que las aptitudes de interés para el desarrollo de la PHC son: la intuición, capacidad de análisis, abstracción, habilidad para interpretar modelos matemáticos, habilidades operativas, interpretación de problemas y la solución de estos (citado en Rojas, 2013).

Ingeniería de Alimentos y la licenciatura en Ingeniería Eléctrica y en el 2018, también se convirtió en un requisito para entrar al bachillerato y licenciatura en Geología y la licenciatura en Ingeniería Mecánica e Ingeniería Mecánica con énfasis en protección contra incendios.

Lo anterior es de interés, porque el modelo estimado solo emplea los resultados de la PHC de un subconjunto de los estudiantes que ingresaron a alguna de las carreras que solicitaba dicha prueba como requisito de admisión en el año 2017<sup>11</sup>, luego de realizar la prueba en el 2016.

En ese sentido, es pertinente traer a colación que la cantidad máxima de estudiantes de primer ingreso que entraron a estas carreras fue de 424, pues esa es la cantidad de cupos que se abrieron para el proceso de admisión del 2017, tal como se muestra en el cuadro 10. Sin embargo, cabe destacar que dicho grupo de estudiantes deben estar matriculados en por lo menos una materia para haber finalizado su proceso de admisión a la Universidad; por lo tanto, no se sabe con certeza cuántos de ellos ingresaron a las aulas universitarias en el primer ciclo de dicho año lectivo.

Por otro lado, existen tres modalidades más de ingreso a carrera: por nota de admisión entre estudiantes, por rendimiento académico y por excelencia académica. Ello implica que la población de estudio podría tomar un valor máximo de 611 estudiantes, tal como lo presenta la siguiente tabla:

Cuadro 10 Cupos disponibles para ingreso a carrera según modalidad de ingreso a carrera en el 2016

Carreras	Cupos para admisión	Cupos para ingreso por	Cupos para ingreso por	Cupo para ingreso por	Total
----------	---------------------	------------------------	------------------------	-----------------------	-------

<sup>11</sup> En el cuadro 10 se enumeran las carreras que solicitaban la PHC para ingresar en estas en el año 2017.

	de primeros ingresos	nota de admisión para estudiantes	rendimiento académico	excelencia académica	
Bachillerato en Estadística	80	22	9	14	125
Bachillerato en Física	93	17	7	11	128
Bachillerato y Licenciatura en Ciencias Actuariales	46	11	4	7	68
Bachillerato y Licenciatura en Matemáticas	32	10	4	6	52
Bachillerato y Licenciatura en Meteorología	18	5	2	3	28
Bachillerato y Licenciatura en Química	66	17	7	11	101
Licenciatura en Farmacia	89	10	4	6	109
<b>Total</b>	<b>424</b>	<b>92</b>	<b>37</b>	<b>58</b>	<b>611</b>

Fuente: Resoluciones VD-R-9437-2016 y VD-R-9439-2016 de la Vicerrectoría de Docencia (2016a, 2016b).

Tomando lo anterior en cuenta, en aras de obtener datos de los estudiantes de dichas carreras, se les aplicaron una serie de test y un cuestionario autosuministrado a las personas que se matricularon en cursos de primer año de carrera impartidos del I y II ciclos del 2017. En el cuadro 11 se presenta un resumen del número de grupos por carrera en el que se recolectaron los datos.

Cuadro 11 Cursos de las carreras que aplicaron la PHC en el 2016, en el cual se realizó la recolección de datos

Carrera	Nombre del curso	Número de grupos	Semestre
Bachillerato en Estadística	Estadística Introdutoria I	5	I
Bachillerato y Licenciatura en Química	Química General I	1	I
Licenciatura en Farmacia	Física aplicada a la Farmacia	3	I
Bachillerato en Física Bachillerato y Licenciatura en Meteorología	Física general para Físicos	1	II
Bachillerato y Licenciatura en Ciencias Actuariales Bachillerato y Licenciatura en Matemáticas	Cálculo en una variable	1	II

Fuente: Elaboración propia.

En total, se entrevistan a 245 estudiantes. Los instrumentos completados por los estudiantes fueron codificados y digitados por la Unidad de Servicios Estadísticos de la Escuela de Estadística.

Al finalizar el proceso de digitación, la base obtenida se unificó con una base brindada por el IIP, que contiene los resultados de la PHC de los estudiantes que hicieron dicha prueba en el 2016 (utilizando como variable llave el número de cédula). Al concluir el proceso de unificación de las bases, el tamaño de muestra se redujo a 155.

## 5.2 Los datos y el modelo

Para estimar el modelo que se presenta posteriormente en esta sección, se utilizan dos fuentes de datos. Por un lado, el departamento encargado de la PHC en el IIP y, por otro lado, los datos obtenidos de las entrevistas autosuministradas a los 155 estudiantes de la muestra.

La primera fuente de datos aporta información sobre los resultados de la Prueba de Habilidades Cuantitativas, una de las variables del modelo en cuestión. Específicamente se trabaja con la calificación (correcto o incorrecto) de cada uno de los 40 ítems realizados en la prueba.

Dada la relevancia de la información de la prueba para definir las personas admitidas en las carreras ya señaladas, la calidad de la información obtenida de parte del IIP es alta. Concretamente, en términos de la estimación del modelo, esto se traduce en que no hay valores perdidos en este conjunto de datos.

De la segunda fuente de datos se obtiene información de las personas estudiantes, que configuran las dos variables restantes del modelo:

- 1) **Habilidades visoespaciales:** a partir de la escala construida por Gerardo Prieto (Prieto, G; Carro, J; Orgaz, B y Pulido, R, 1993). Dichas habilidades, de acuerdo con French (1951), consisten en la habilidad de comprender y realizar movimientos imaginarios en espacios tridimensionales o la habilidad de manipular objetos con la imaginación<sup>12</sup>.

---

<sup>12</sup> Por otro lado, Lohman concluyó que las habilidades espaciales o visoespaciales pueden ser definidas como la habilidad de generar, retener y manipular imágenes visuales abstractas. Al nivel más básico, el pensamiento espacial requiere la habilidad de codificar, recordar, transformar y atender a estímulos espaciales. En ese sentido, esta es la habilidad para realizar ejercicios que

2) **Capital:** Esta se operacionaliza mediante la escala de capital económico y cultural de las Pruebas de PISA, cuyos ítems exploran la tenencia de ciertos bienes materiales en los hogares de la persona entrevistada, como libros, instrumentos musicales, enciclopedias, carros, motocicletas, computadoras, televisores, entre otros.

Sobre la calidad de esta fuente de datos, cabe destacar que todos estos instrumentos han sido validados previamente, por lo cual aportan información de alta calidad psicométrica para la medición de los *constructos* de interés. Además, no registran valores perdidos en las respuestas de los ítems.

Un elemento relevante sobre el test de visualización espacial es que originalmente este contiene 26 ítems y posee un coeficiente de Kuder-Richardson (KR20) de 0,92, lo cual indica que la escala posee una alta fiabilidad (Prieto, G; Carro, J; Orgaz, B y Pulido, R, 1993). El tiempo de aplicación de esta prueba es de 40 minutos; por tanto, en aras de reducir el tiempo de aplicación a 20 minutos y adecuarlo al tiempo con el se contaba para aplicar la totalidad de los cuestionarios a los y las estudiantes por grupo, se decidió aplicar una reducción de la prueba a 14 ítems (los 13 ítems impares más el ítem 26).

Esta solución toma en cuenta que los ítems están ordenados por dificultad creciente, y según la ecuación de la profecía de Spearman-Brown, a la selección de preguntas realizada se le pronostica una confiabilidad alta de 0,85<sup>13</sup>.

---

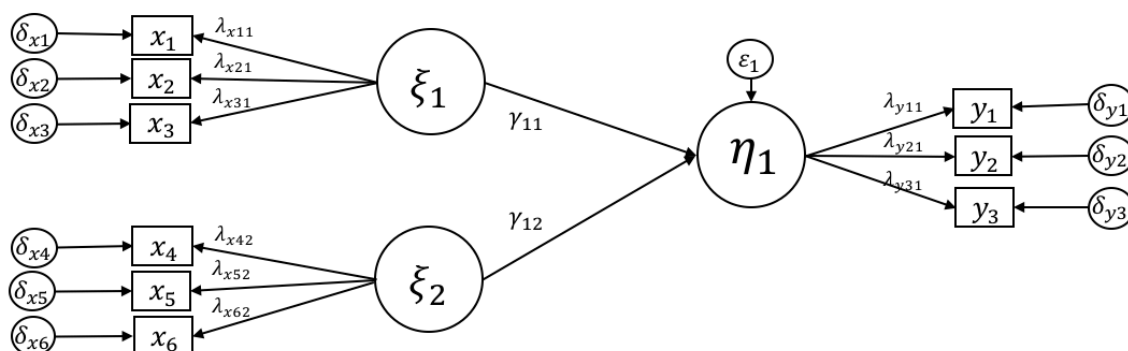
involucren relaciones espaciales, orientaciones espaciales y visualización (citado en Carroll, 1993).

Para Carroll, la capacidad espacial no es un proceso unitario y puede descomponerse en varias formas distintas, lo cual ha sido confirmado por diversas investigaciones. Los estudios analíticos de factores de las tareas de capacidad espacial a menudo apuntan a dos habilidades espaciales distintas, visualización y orientación. La visualización se refiere a la capacidad de girar mentalmente y manipular objetos, mientras que la orientación se refiere a la capacidad de retener la orientación espacial con respecto al propio cuerpo (Kaufman, 2006).

<sup>13</sup> La fórmula de predicción de Spearman-Brown, también conocida como fórmula o ecuación de profecía Spearman-Brown, es una fórmula que relaciona la fiabilidad psicométrica con el tiempo de duración de la aplicación de la prueba. Es decir, la fiabilidad de una prueba después de cambiar la longitud de esta (Allen y Yen, 1979).

El análisis de confiabilidad y validez de las escalas de capital y de visualización espacial muestra que ambas poseen las características deseadas en los análisis psicométricos<sup>14</sup>. Específicamente, para la escala de capital el Alfa de Cronbach es igual a 0,824 para los 24 ítems y el primer factor explicaba un 21,25% de la varianza. En el caso de la escala de visualización espacial, que contaba con 14 ítems, el Alfa de Cronbach es igual 0,751, y el primer factor explica un 26,09% de la varianza.

Una vez presentadas las fuentes de datos y las tres variables que se van a utilizar en el modelo, a continuación se presenta el modelo de ecuaciones que se estima para poner en práctica los hallazgos del capítulo anterior.



donde:

$$\xi_1 = \text{Capital (CA).}$$

<sup>14</sup> Para llevar a cabo el análisis de confiabilidad y validez de una escala, se realizaron dos análisis: por un lado, la estimación de la validez del *constructo* de cada instrumento se analizó por medio de un análisis factorial de componentes principales con rotación PROMAX, y, por otro lado, se estimó la confiabilidad de cada escala utilizando el Alfa de Cronbach.

En el caso del análisis de la validez del *constructo*, se utilizaron dos criterios psicométricos complementarios para establecer el número de factores: (1) un porcentaje de varianza explicada de 20% como mínimo para cada factor, y, (2) confirmación de los factores mediante el comportamiento del gráfico de sedimentación y la aparición del “codo” en esta.

Por otro lado, en el caso del análisis de confiabilidad, se procuró que el Alfa de Cronbach tomara valores de por lo menos 0,70 y se valoró la posibilidad de eliminar ítems si se daba un mejoramiento del Alfa de Cronbach, pero no fue necesario, ya que ambas escala cumplían con este criterio.

Una vez verificada la fiabilidad de la escala se realizó el análisis de validez. De dicho análisis se concluyó que las escalas cumplen con el criterio del porcentaje de varianza explicada, criterio que es confirmado por gráficos de sedimentación.

$\xi_2$  = Habilidades cuantitativas (HC).

$\eta_1$  = Habilidades visoespaciales (VE)

Las  $x_i$  y las  $y_i$  son las variables observadas que pretenden medir las variables exógenas y las variables endógenas respectivamente, mientras que  $\delta_i$  son los errores asociados a estas y  $\varepsilon_1$  es el error asociado a la variable endógena  $\eta_1$ .

El objetivo de este modelo, además de ser el caso empírico de aplicación del hallazgo metodológico de esta investigación, es analizar si las habilidades cuantitativas operacionalizadas en la PHC están asociadas con las habilidades visoespaciales.

Lo anterior, con el fin de comprobar el siguiente argumento: dado que la PHC mide las habilidades de resolución de problemas matemáticos y estas habilidades involucran la capacidad de visualización, se pretende verificar si la PHC predice las habilidades de visualización, como parte del razonamiento matemático que pretende evaluar en futuros estudiantes de la UCR.

En ese sentido, es importante mencionar que la visualización es uno de los factores que se operacionalizan por medio de las habilidades visoespaciales (Carroll, 1993). De hecho, Arcavi (2003) describe la visualización en términos muy generales como: *"la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas"* (p. 217).

En general, esto permite considerar que la matemática, dado que trata con objetos y entidades muy diferentes de cualquier fenómeno físico, se apoya sobre la visualización en sus diferentes formas y niveles, lo cual, cabe destacar no es un elemento exclusivo de la geometría (Arcavi, 2003).

Por ello, es necesario evaluar los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren "ver" o "imaginar" mentalmente los objetos, así como relacionar los objetos y llevar a cabo determinadas operaciones o

transformaciones geométricas con estos. Desde el trabajo matemático, esto se puede plasmar también en los momentos de abordar la resolución de problemas, formulación de conjeturas, entre otros (Godino, *et al.*, 2012).

Godino *et al.* (2012) proponen que la necesidad de estudiar los componentes de la visualización y su relación con otros procesos implicados en la actividad matemática. Aunado a ello, pese a la numerosas investigaciones que pretenden diferenciar entre los componentes de las habilidades visoespaciales, Kaufman (2006) señala que existe el consenso en que los procesos de visualización involucrados en las tareas de rotación de imágenes mentales no han recibido la atención que merecen como contribuyente importante y relativamente independiente de la manifestación de la inteligencia humana (Johnshon y Bouchard, citado en Kaufman, 2006).

Además, el modelo que se plantea pretende evaluar si el capital que poseen los individuos (esencialmente operacionalizado sobre la tenencia de bienes materiales), permite predecir las habilidades visoespaciales. Ello, como una variable control que busca incorporar un elemento del ambiente de socialización de los individuos estudiados y de los estímulos con los que cuenta en su hogar.

Ahora bien, esta explicación ayuda a dar sentido teórico a la formulación del modelo de ecuaciones estructurales planteado, pero no hay que perder de vista que el fin esencial de la estimación de este modelo es poner en práctica los resultados de las simulaciones en un caso de investigación real.

Finalmente, antes de discutir los resultados del modelo en cuestión, es importante mencionar que las indicadores de las variables exógenas y la endógenas son construidas con el método de parcelas, con base en los criterios de Little (2003).

Según Little (2013), la parcelación se refiere a tomar dos o más elementos y “empaquetarlos” o agruparlos, promediándolos. La parcela se utiliza como indicador del *constructo* latente, en vez de los ítems originales de las escalas. En ese sentido, cuando se agrupa un conjunto de ítems en una parcela para generar



una variable medible, medir a un *constructo*, Little (2013) recomienda promediar los ítems en lugar de sumarlos.

Lo anterior se debe a que, si se suman y los ítems difieren, las parcelas tendrán diferentes métricas, dando medias y varianzas materialmente diferentes. Al respecto, si se promedian los ítems, las parcelas tendrán métricas similares con medias y variaciones similares comparables<sup>15</sup>.

La agrupación de los ítems en las parcelas se realiza entonces bajo dos criterios, en el siguiente orden de prioridad: (1) se agruparon los ítems por su semejanza en términos de su contenido temático, y (2) se agruparon los ítems según su semejanza en términos de sus medias.

---

<sup>15</sup> En la comunidad científica hay un debate sobre si se deben usar parcelas o no se deben utilizar. Sin embargo, Little (2013) expone una serie de ventajas del parcelamiento que se pueden resumir en dos clases: sus características psicométricas fundamentales y su comportamiento al estimar un modelo.

En términos de las características psicométricas que aventajan la generación de parcelas sobre uso directo de los ítems, se pueden mencionar: mayor confiabilidad, mayor comunalidad, mayor proporción de varianza explicada en un único factor. Little (2013) argumenta que las parcelas tendrán mayor confiabilidad que los ítems que se usan para crearlas. Como resultado de tener una mayor confiabilidad, las parcelas tendrán una mayor variación de puntuación verdadera que los ítems, lo que también hará que las cargas de los factores sean más fuertes, aumentando la comunalidad.

Además, Little (2013) agrega que esas tres características mencionadas de las parcelas son buenas cuando se trata de ajustar un modelo SEM. Además, la generación de parcelas colabora en que se cumpla el supuesto distributivo de las variables medibles, o sea, es más probable que las parcelas se distribuyan normalmente que los ítems.

Por otro lado, los modelos con parcelas en oposición a los ítems tienen: menor cantidad de parámetros que estimar en el modelo, menor probabilidad de residuos correlacionados y reducen las fuentes del error de muestreo.

De acuerdo con la definición de este autor (Little, 2013) la variabilidad de muestreo es la variabilidad inherente en torno a los valores de población reales cuando se realiza la estimación de un parámetro a partir de un modelo estadístico que se produce cuando se extraen diversas muestras de la población. Concretamente, lo que él desea señalar es que cualquier muestra puede desviarse de los valores de población hasta cierto punto.

Para Little (2013), parcelar reduce la variabilidad de muestreo dada la muestra seleccionada y la inadaptación del modelo propuesto en la población. Los beneficios de reducir la probabilidad de residuos correlacionados y cargas duales a un factor son aspectos de cómo las parcelas reducen la variabilidad de muestreo (una carga doble o residual correlacionado podría ser solo una fluctuación de muestreo) o inadaptación poblacional (una carga doble o el residuo correlacionado podría ser cierto para los datos del ítem en la población, pero ya no sería cierto para los datos a nivel de parcelas en la población).

### **5.3 Relación del modelo propuesto con los hallazgos de simulación**

El análisis empírico propuesto está asociado con la simulación expuesta en el capítulo anterior por los siguientes factores:

- 1) El tamaño de muestra es igual a 155. Un  $n$  que se ubica entre las 100 y 200 observaciones planteadas en los 18 escenarios de simulación.
- 2) Las parcelas de la variable endógena de las habilidades visoespaciales, no cumplen con el supuesto de normalidad y tienen asimetría positiva con los siguientes valores: 0,76, 1,07 y 1,33. Estas magnitudes se encuentran entre los rangos de asimetría positiva evaluados en los escenarios de simulación.
- 3) Las parcelas de la variable exógena Capital son normales y poseen las siguientes asimetrías: -0,34, 0,13 y -0,45.
- 4) Las parcelas de la variable exógena Habilidades Cuantitativas son normales y poseen las siguientes asimetrías: 0,30, 0,15 y 0,47.

Lo anterior, en el contexto de un modelo con una variable endógena y dos exógenas, igual al modelo de simulación planteado en el capítulo de la propuesta metodológica de la presente investigación.

### **5.4 Comparación de los resultados del modelo estimado con máxima verosimilitud y otros métodos robustos al incumplimiento del supuesto de multinormalidad**

La estimación del modelo de simulación planteado en esta investigación se efectúa mediante el método de máxima verosimilitud (MV), que, como ya se ha mencionado en numerosas ocasiones, tiene como supuesto que la distribución de las variables observadas sea normal.

Por tanto, dicho método también se usa para estimar el modelo de las habilidades visoespaciales introducido anteriormente, que cuenta con asimetría positiva en las parcelas de la variable endógena y, por tanto, incumple con el supuesto de multinormalidad requerido en MV.

En aras de analizar cuáles son los sesgos presentes en las estimaciones de este método, estas se compararan con las estimaciones obtenidas por otros tres métodos de estimación que son robustos al incumplimiento del supuesto de multinormalidad. Los tres métodos robustos utilizados para llevar a cabo este ejercicio comparativo de los resultados son:

- 1) **Máxima verosimilitud con media ajustada (MVM):** En comparación con la estimación de MV, este es un enfoque robusto y depende menos del supuesto de distribución normal multivariante. Entonces, los parámetros aun se obtienen mediante la utilización del estimador asintótico imparcial de MV, pero los errores estándar y las estadísticas de prueba de chi-cuadrado se corrigen con el método de Satorra-Bentler (Satorra y Bentler, 1988,1994)
- 2) **Máxima verosimilitud robusta (MVR):** Es una extensión de MLM y también es un enfoque robusto al supuesto de distribución normal multivariante. En este método de estimación, los errores estándar de MLR se calculan utilizando un estimador sándwich, en vez de usar la matriz de información de Fisher inversa, y la estadística de prueba de chi-cuadrado de MLR es asintóticamente equivalente a la estadística de prueba Yuan-Bentler  $T_2^*$  (Li, 2016).
- 3) **Máxima verosimilitud de primer orden (MVP):** Es una extensión de MV, donde los errores estándar están basados en las derivadas de primer orden y no se le realiza corrección a la prueba chi-cuadrado (Li, 2016).

En el cuadro 12 se presentan los coeficientes estandarizados y los errores estándar de las cargas factoriales y los coeficientes de regresión para el modelo presentado en la sección 5.2. Lo anterior, como resultado del uso de cuatro métodos de estimación: máxima verosimilitud (ML), máxima verosimilitud con media ajustada (MLM), máxima verosimilitud robusta (MVR) y máxima verosimilitud de primer orden (MVP).

El cuadro muestra que, tal y como se esperaba según los hallazgos de las simulaciones, las estimaciones con MV de las cargas factoriales de la variable endógena con parcelas que tienen asimetrías positivas con magnitudes entre 0,7 y 1,7, prácticamente no sufren sesgos. Esto se traduce en que los resultados obtenidos por los métodos de estimación robustos y la MV son prácticamente iguales.

Asimismo, las estimaciones de los coeficientes de regresión que cuantifican la relación entre los *constructos*, también son consistentes con los resultados de las simulaciones, pues prácticamente no presentan diferencias relevantes entre ellos.

Es relevante señalar que este cuadro contiene los errores estándar para mostrar si las correcciones llevadas a cabo por los modelos robustos representaban diferencias relevantes en estos. Sin embargo, tanto los coeficientes estandarizados como los errores estándar son iguales para todos los métodos de estimación utilizados.

En términos prácticos, el modelo tiene cargas factoriales en general superiores a 0,7 (solamente hay una que es igual a 0,6), lo cual indica que las parcelas construidas a partir de las escalas para cada *constructo* representan adecuadamente las variables latentes correspondientes. Esto se puede visibilizar con mayor claridad en la figura 24, que representa el modelo causal propuesto.

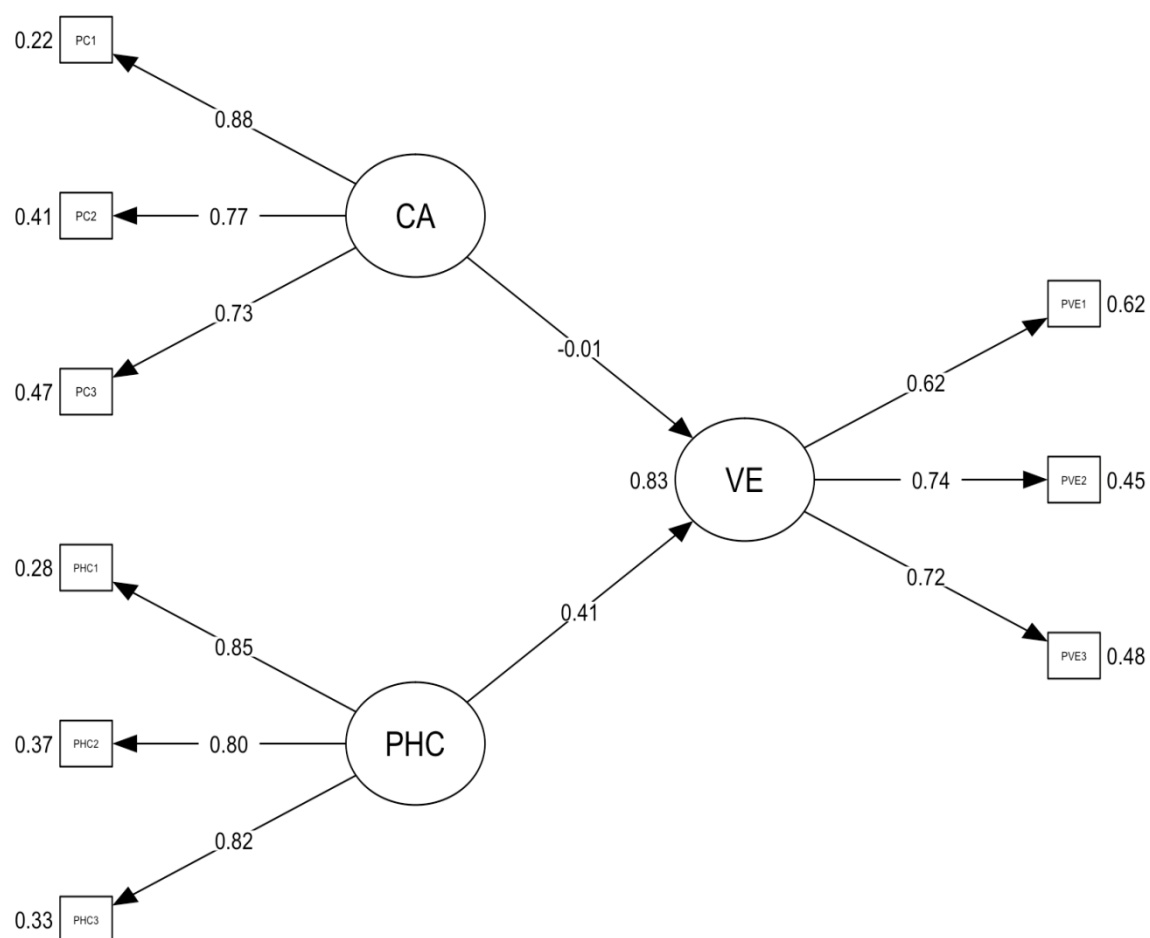


Figura 24 Modelo causal para las habilidades visuoespaciales, las habilidades cuantitativas y el capital, con coeficientes estandarizados

**Fuente:** Elaboración propia.

Cuadro 12 Coeficientes estandarizados y errores estándar de las cargas factoriales y los coeficientes de regresión del modelo para habilidades visoespaciales estimados con cuatro métodos de estimación

Estadísticos	Método de Estimación							
	ML		MVM		MVR		MVP	
	Error Estándar	Coef. estand	Error Estándar	Coef. estand	Error Estándar	Coef. estand	Error Estándar	Coef. estand
<b>Cargas factoriales</b>								
HC ~ PHC3	0.163	0.816	0.163	0.816	0.163	0.816	0.163	0.816
HC ~ PHC2	0.170	0.795	0.170	0.795	0.170	0.795	0.170	0.795
HC ~ PHC1	0.159	0.846	0.159	0.846	0.159	0.846	0.159	0.846
VE ~ PVE3	0.822	0.720	0.822	0.720	0.822	0.720	0.822	0.720
VE ~ PVE2	0.761	0.744	0.761	0.744	0.761	0.744	0.761	0.744
VE ~ PVE1	0.567	0.619	0.567	0.619	0.567	0.619	0.567	0.619
CA ~ PC3	0.171	0.727	0.171	0.727	0.171	0.727	0.171	0.727
CA ~ PC2	0.233	0.771	0.233	0.771	0.233	0.771	0.233	0.771
CA ~ PC1	0.347	0.884	0.347	0.884	0.347	0.884	0.347	0.884
<b>Coeficientes de regresión entre la variable endógena y las variables exógenas</b>								
VE ~ CA	-0.007	-0.007	-0.007	-0.007	-0.007	-0.007	-0.007	-0.007
VE ~ PHC	0.454	0.414	0.454	0.414	0.454	0.414	0.454	0.414

1/ La sigla HC hace referencia al *constructo* habilidades cuantitativas, VE a habilidades en visualización espacial y CA a capital.

2/ PHC3, PHC2 y PHC1 representan las tres parcelas de la variable latente HC, y la misma lógica se repite para PVE con VE y PCA con CA.

**Fuente:** Elaboración propia.

Por otro lado, los coeficientes de regresión indican que el capital tiene una asociación de -0,007 con las habilidades en visualización espacial; es decir, el capital que posean los estudiantes (en los términos de tenencias materiales) no explica las habilidades visoespaciales. Ello, entendiendo que en la modelación del comportamiento humano, coeficientes estandarizados mayores a 0,10 y menores a -0,10 son considerados como evidencia de relevancia práctica de la relación entre las variables analizadas.

Con respecto a las habilidades cuantitativas cuantificadas por la PHC, el modelo identifica que estas son muy relevantes para explicar las habilidades visoespaciales de los estudiantes de la muestra pues su coeficiente estandarizado es igual a 0,414.

Esto refiere a que la PHC predice las capacidades de visualización para la resolución de problemas matemáticos de los estudiantes que ingresan a ciertas carreras con alto contenido matemático de la UCR, tal como se espera de una prueba con estas funciones.

En términos de las medidas de bondad de ajuste, el modelo cuenta con un buen ajuste según el RMSEA, SRMR, GFI y el estadístico chi-cuadrado, tal como lo muestran sus magnitudes en el cuadro 13.

Cuadro 13 Medidas de bondad de ajuste para el modelo de habilidades visoespaciales obtenidas con cuatro modelos de estimación

Medida de Bondad de Ajuste	Método de Estimación			
	ML	MVM	MVR	MVF
RMSEA	0,043	0,047	0,042	0,043
SRMR	0,039	0,039	0,039	0,039
GFI	0,963	0,963	0,963	0,963
Chi- Cuadrado (gl)	30,8 (24)	30,8 (24)	30,8 (24)	30,8 (24)

**Fuente:** Elaboración propia.

Dichas medidas fueron prácticamente iguales para los distintos métodos de estimación. El único estadístico que tuvo una leve diferencia es RMSEA para la estimación MVM; sin embargo, su interpretación no varía, dado que la magnitud de los RMSEA en los cuatro casos es de aproximadamente 0,04, valor que al ser menor a 0,06 refiere a un ajuste óptimo del modelo.

Por otro lado, el GFI es mayor a 0,9 e indica buen ajuste, al igual que el SRMR, que, al ser menor que 0,05, lleva a la misma conclusión. Por último, el estadístico chi-cuadrado es igual para las cuatro estimaciones (por tanto, no se observan correcciones en dicho estadístico), con una magnitud de 30,8. En este caso, el test chi-cuadrado con 24 grados de libertad lleva a la conclusión de que no hay suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula de que el modelo estimado posee un buen ajuste, con un nivel de significancia de 0,05.

En conclusión, el método de estimación por máxima verosimilitud es robusta para calcular los parámetros de este modelo con dos variables exógenas y una variable endógena, cuando esta última posee tres parcelas que no cumplen con el supuesto de normalidad, debido a que poseen asimetría entre 0,7 y 1,7, con una muestra de 155 observaciones.

Por tanto, el método por máxima verosimilitud ante estas condiciones realiza estimaciones que son prácticamente insesgadas, lo cual permite concluir que no es necesario utilizar otro método de estimación para este caso empírico de modelo de ecuaciones estructurales para las habilidades visoespaciales. Resultado que es consistente con los hallazgos del capítulo anterior y funciona como una validación de estos.



## 6. CONCLUSIONES

Esta investigación evalúa el comportamiento de las estimaciones de las cargas factoriales, los coeficientes de regresión de las variables latentes y las medidas de bondad de ajuste de un modelo de ecuaciones estructurales. Esto, en el marco de un estudio de simulación, en el cual el modelo es estimado con el método de máxima verosimilitud y el punto de inflexión refiere a que hay incumplimiento del supuesto de normalidad en algunas variables medibles.

El modelo de ecuaciones estructurales en cuestión es uno con dos variables exógenas y una endógena, en el cual cada una posee tres variables indicadoras, siguiendo las recomendaciones de Little (2013). Entonces, de las nueve variables observadas, las tres que corresponden a la variable endógena incumplen el supuesto de normalidad, pues presentan asimetría positiva.

Dicha asimetría positiva ha tomado tres magnitudes específicas: 0,7, 1,7 y 2,7; estas representan valores de una asimetría leve, una asimetría moderada y una asimetría alta, respectivamente. Tomando en cuenta que si la asimetría está entre -0,5 y 0,5, la distribución es aproximadamente simétrica, si está entre -1,0 y -0,5 o entre 0,5 y 1,0, la distribución está moderadamente sesgada y si la asimetría es menor que -1 o mayor que 1, la distribución está muy sesgada (Trochim & Donnelly, 2006; Field, 2000 & 2009; Gravetter & Wallnau, 2014).

Aunado a lo anterior, el modelo de simulación planteado representa un modelo de ecuaciones estructurales cuyas relaciones causales son fuertes y en las cuales las indicadoras representan con gran precisión el *constructo* que les corresponde. Ello, con tamaños de muestra de 100 y 200 observaciones, así como con diferente número de indicadoras asimétricas (una, dos o las tres de la variable endógena).

Del presente estudio de simulaciones se puede concluir que el método de estimación por máxima verosimilitud, en lo que respecta a la estimación de las cargas factoriales y los coeficientes de regresión del modelo estructural, es robusto a las condiciones de asimetría planteados. Sobre todo para el tamaño de

muestra de 200 observaciones, en contraste con el de 100 observaciones. Lo anterior, mientras se mantiene un buen ajuste del modelo según las medidas de bondad de ajuste RMSEA, SRMR, GFI, e incluso en el caso del estadístico de bondad de ajuste chi-cuadrado, que tiende a ser sensible al incumplimiento del supuesto de normalidad (Satorra y Bentler, 1994, 1998).

En ese sentido, es importante retomar el hecho de que ante el incumplimiento del supuesto de distribución de las variables indicadoras, el supuesto de estructura que se establece en el modelo de simulación no se debilita, entendiendo como supuesto de estructura lo relacionado con la especificación del modelo de simulación, en términos de que las magnitudes de las cargas factoriales y los coeficientes del modelo estructural que se fijan en el diseño de las simulaciones para representar asociaciones fuertes, no presentan sesgos relevantes en ninguno de los resultados de los escenarios formulados.

Dicho hallazgo, retoma la pregunta de Carrant, West y Finch (1996), planteada en el encuadre teórico (en la sección 2,4), pues el presente estudio evidencia que el entramado teórico representado en el modelo de simulación no sufre ninguna modificación, cuando se incumple el supuesto de normalidad según las condiciones establecidas. En otras palabras, los resultados evidencian que no se dio un cambio relevante en la intensidad de las relaciones entre variables latentes, y *constructos* y variables observadas, de acuerdo con el modelo de simulación que se plantea en el abordaje metodológico.

Sobre los coeficientes del modelo estructural, la conclusión más importante es que se produce una ligera asimetría negativa en la distribución de estos en los escenarios con alta asimetría positiva en las indicadoras. Ahora, dicho sesgo es muy pequeño, sin importar el tamaño de muestra del escenario de simulación.

En otras palabras, existe un pequeño sesgo que tiende a sobrestimar ligeramente dichos coeficientes del modelo estructural cuando hay asimetría positiva en las variables observadas de la variable endógena. Esto se constata al observar las curvas de densidad de las distribuciones de los coeficientes en cuestión, que prácticamente se traslapan con las curvas de densidad de los casos control

correspondientes, lo cual indica que justamente su estimación se ve poco sesgada al usar el método de la máxima verosimilitud, con las condiciones de asimetría dadas.

En el caso de la estimación de las cargas factoriales de las indicadoras con alguna asimetría, el sesgo de sobrestimación es ligeramente más grande que la que presentan los coeficientes del modelo estructural, pero no por ello relevante a nivel práctico. Con respecto a la estimación de las cargas y su relación con la variación del número de variables observadas correspondientes a estas con alguna asimetría positiva, es necesario agregar que el cambio del número de indicadoras que incumplían la normalidad no representó un elemento relevante que cause diferencias importantes en el tamaño del sesgo. Esto, debido a que esencialmente los leves cambios que se notan en los histogramas y las curvas de densidad mostradas en el capítulo de resultados y los anexos, son notorios solamente cuando las tres variables presentan asimetría positiva.

Un elemento que se desprende de lo anterior, tiene que ver con el hecho de que el sesgo más relevante lo presenta la carga factorial de la primera variable indicadora de la variable endógena (aunque el sesgo es pequeño). Eso, al mismo tiempo que las estimaciones de las cargas factoriales asociadas a las variables observadas que cumplen el supuesto de normalidad, son prácticamente insesgadas.

En resumen, sobre los coeficientes del modelo que son objeto de análisis, se puede concluir que los histogramas y las curvas de densidad ilustran que el potencial del sesgo que implica la presencia de la asimetría positiva en las indicadoras ya señaladas, tiene que ver con la sobrestimación de las cargas factoriales correspondientes a estas y, en consecuencia, con la sobrestimación de los coeficientes de regresión entre las variables latentes, aunque, en este caso, el sesgo es mínimo.

En otras palabras, a mayor asimetría en las parcelas, hay una ligera tendencia a la asimetría negativa en las curvas de densidad de las cargas factoriales con respecto a los escenarios en los cuales se cumple el escenario de normalidad.

Eso se traduce en que hay mayor probabilidad de sobrestimar los valores de la carga factorial.

En términos de los tamaños de muestra empleados en las simulaciones, hay que señalar que, cuando hay tres parcelas con asimetría 1,7 o 2,7, es cuando más distan las curvas de densidad del escenario de simulación y el caso control, siendo más grande el sesgo, con una asimetría de 2,7, aunque, se debe distinguir que el sesgo en general tiende a ser mayor cuando la muestra es menor. Es decir, las curvas de densidad del caso control y el caso del escenario se traslapan en mayor medida cuando la muestra es de 200. Por tanto, en concordancia con las recomendaciones que existen en la comunidad estadística, esta investigación reafirma que es mejor trabajar con el tamaño de muestra más grande.

Ahora bien, con estas observaciones se pretende hacer notar varias tendencias en el comportamiento de los escenarios de simulación, pero, en general, el sesgo en las cargas factoriales y de los coeficientes entre las variables latentes es irrelevante a nivel práctico; ello quiere decir que para estas estimar dichos estadísticos, la técnica de la máxima verosimilitud es robusta bajo las condiciones del modelo de simulación. Esta es la gran conclusión de la presente investigación y su aporte metodológico.

### ***Limitaciones de la investigación y el estudio de simulación***

En este punto hay tres limitaciones del estudio que son dignas de mención. Primero, esta pesquisa examinó un modelo relativamente simple; por tanto, no se trata si resultados similares se obtendrían con rutas indirectas más complejas que involucren múltiples mediadores, tema para futuras investigaciones. Ello tiene las dificultades de lograr especificar el modelo de simulación, en el cual, en este caso, requirió del asesoramiento de un matemático, específicamente del M.Sc. Luis Rojas.

Lo anterior, implica al mismo tiempo que los hallazgos que se exponen en el contenido de este documento pretenden dilucidar un escenario en los modelos de ecuaciones estructurales muy específico. En otras palabras, el alcance del estudio de simulación está limitado para consideraciones prácticas relacionadas

con el diseño de simulación. Sin embargo, es una aproximación al tema que es prudente pues permite no solo responder la pregunta de investigación, sino, también, considerar las dificultades y limitaciones para realizar este tipo de estudios.

En segundo lugar, en el modelo de simulación las variables indicadoras están sesgadas en una misma dirección y solo en la variable endógena. Y, aunque es un escenario muy específico, el caso empírico estudiado en el capítulo anterior muestra que puede suceder en casos de análisis del comportamiento humano. En ese sentido, se puede considerar la idea que, ante mayor cantidad de variables indicadoras con asimetría, en las que dichas asimetrías sean positivas y negativas probablemente se den a la vez resultados mucho más drásticos en los sesgos de las estimaciones.

Tercero, en el estudio de simulación planteado solo se examinan distribuciones cuyos valores de kurtosis son prácticamente nulos. Eso significa que un elemento pendiente de estudio es la influencia de la kurtosis en las estimaciones de modelos estructurales, particularmente en los coeficientes de regresión del modelo estructural, en el que la literatura ha mostrado un vacío por llenar.

Finalmente, es imperativo señalar que este estudio de simulación es posible realizarlo debido a la capacidad computacional con la que se cuenta en la actualidad. En ese sentido, es necesario apuntar que la simulación de los veinte escenarios de simulación, tomando en cuenta los escenarios control, dura aproximadamente tres meses, haciendo uso de cinco ordenadores simultáneamente.

En términos computacionales, cuanta más asimetría se definía, mayor tiempo se requiere para simular, y cuanto mayor tamaño de muestra, menor tiempo toma la simulación. En ese contexto, los escenarios con asimetrías de 2,7 tomaban alrededor de diez días para un tamaño de muestra de 100 observaciones y se reducía levemente cuando se usaban 200 observaciones.

En ese sentido, una alternativa para realizar con mayor velocidad las simulaciones es utilizar paralelización en el código de las simulaciones. No

obstante, esta requiere cierta experiencia que requiere tiempo para ser asentada y procesada adecuadamente para obtener mejores resultados.

## BIBLIOGRAFÍA

- Allen, M.; Yen W. (1979). *Introduction to Measurement Theory*. Monterey, CA: Brooks/Cole.
- Almeida, L. *et al.* (2015) Contribuciones del factor general y de los factores específicos en la relación entre inteligencia y rendimiento escolar. *European Journal of Education and Psychology*, Vol.1, N.º3, 5-16.
- Andrade, M y Cantoral, R. (s.f). Sobre las habilidades espaciales y la dimensión sociocultural del aprendizaje de “lo geométrico”. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, Capítulo 3.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.
- Bentler, P. M. (1990). Comparative fit indexes in structural models. *Psychological Bulletin*, 107(2), 238.
- Bentler, P. M., & Bonett, D. G. (1980). Significance tests and goodness of fit in the analysis of covariance structures. *Psychological Bulletin*, 88(3), 588.
- Bollen, K. A. (1989). *Structural Equations with Latent Variables*. New York: John Wiley y Sons.
- Bollen, K. A. (2002). Latent variables in psychology and the social sciences. *Annual Review of Psychology*, 53, 605–634.
- Bottazzi, G. y Secchi, A. (2008). Maximum likelihood estimation of the symmetric and asymmetric exponential power distribution, LEM Working Paper Series, N.º 2006/19. Recuperado el 7 de octubre, en: <https://www.econstor.eu/bitstream/10419/89467/1/518480232.pdf>
- Browne, M. W., & Cudeck, R. (1992). Alternative ways of assessing model fit. *Sociological Methods & Research*, 21(2), 230–258.
- Burnham, K. y Anderson, D. (2004). Multimodel Inference: Understanding AIC and BIC in Model Selection. *Sociological Methods Research*: 33. 261-304.

- Carroll, J. B. (1993). *Human Cognitive Abilities: A survey of factor analytic studies: USA*, Cambridge University Press.
- Cea, M. (2002). *Análisis multivariable: Teoría y práctica en la investigación social*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Chou, C. P., Bentler, P. M., y Satorra, A. (1991). Scaled test statistics and robust standard errors for non-normal data in covariance structure analysis: A Monte Carlo study. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 44, 347-357.
- Coenders, G; Batista, J y Saris, W. (2005). *Temas avanzados en modelos de ecuaciones estructurales*. España, Madrid. Editorial La Muralla.
- Consejo Universitario. (2003). Acta de la sesión 4836 13-10-2003. Universidad de Costa Rica. Recuperado el 25 de noviembre del 2018 de: [http://www.cu.ucr.ac.cr/uploads/tx\\_ucruniversitycouncildatabases/minute/2003/4836.pdf](http://www.cu.ucr.ac.cr/uploads/tx_ucruniversitycouncildatabases/minute/2003/4836.pdf)
- Crisci, A. (2012). Estimation methods for the structural equation models: Maximum likelihood, partial least squares and generalizes maximum entropy. *Journal of Applied Quantitative Methods*. Recuperado el 1.º de octubre de 2017, en: [http://jaqm.ro/issues/volume-7,issue-2/pdfs/1\\_crisci.pdf](http://jaqm.ro/issues/volume-7,issue-2/pdfs/1_crisci.pdf)
- Curran, P; West, S y Finch, J. (1996). The Robustness of Test Statistics to Nonnormality and Specification Error in Confirmatory Factor Analysis. *Psychological Method*, 1(1), 16-29.
- Doepken, D. Lawsky, E., y Padwa, L. (2003). Modified Fennema-Sherman Attitude Scales. Recuperado de: <http://www.woodrow.org/teachers/math/gender/08scale.html>
- Dziak, J., *et al.* (2012). *Sensitivity and Specificity of Information Criteria (Informe 12-119)*. Pennsylvania: Autores.
- Dwyer, C. A., Gallagher, A. M., Levin, J. y Morley, M. (2003). *What is Quantitative Reasoning? Defining the Construct for Assessment Purpose*. New Jersey:



- ETS. Recuperado de <http://www.ets.org/Media/Research/pdf/RR-03-30-Dwyer.pdf>
- Field, A. (2000). *Discovering statistics using spss for windows*. London-Thousand Oaks- New Delhi: Sage Publications.
- Field, A. (2009). *Discovering statistics using SPSS*. London: SAGE.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-142.
- Fennema, E., y Sherman, J. (1976). Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales: Instruments Designed to Measure Attitudes toward the Learning of Mathematics by Females and Males. *Journal for Research in Mathematics Education*, 7(5), 324-326. doi:10.2307/748467.
- Fleishman, A. I. (1978). A method for simulating nonnormal distributions. *Psychometrika*, 43, 521-532.
- Forgasz, H.J., Leder, G.C. y Gardner, P.L. (1999). The Fennema-Sherman Mathematics as a Male Domain Scale Reexamined. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (3), 342-348.
- French, J. W. (1951). The description of aptitude and achievement test in terms of rotates factors. *Psycometric Monographs*, N.º 5.
- Gao, S., Mokhtarian, P. y Johnston, R. (2008). Non-normalityt of Data in structural Equation Models. Research Report UCD-ITS-RR-08-47. Institute of Transportation Studies, Universityt of California.
- Garver, M. y Mentzer, J. (1999). Logistics research methods: Employing structural equation modeling to test for construct validity. *Journal of Business Logistics*, 20, 1, pp. 33-57
- Godino, J; Cajaraville, J; Fernández, T y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas*. N.º 30.2 (2012): 109-130 ISSN: 0212-452. Recuperado el 3 de octubre, en:

[https://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc\\_a2012m6v30n2/edlc\\_a2012m6v30n2p109.pdf](https://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc_a2012m6v30n2/edlc_a2012m6v30n2p109.pdf)

- Grace, J. (2006). *Structural Equation Modeling and Natural Systems*. Cambridge University Press.
- Gravetter, F., & Wallnau, L. (2014). *Essentials of statistics for the behavioral sciences* (8.<sup>th</sup> ed). Belmont, CA: Wadsworth.
- Hoe, S. (2008). Issues and procedures in adopting structural equation modeling technique. *Journal of Applied Quantitative Methods*, 3 (1), 76-83.
- Hoelter, D. (1983). The analysis of covariance structures: Goodness-of-fit indices, *Sociological Methods and Research*, 11, pp. 325–344
- Hooper, D., Coughlan, J., y Mullen, M.R. (2008). Structural equation modelling: Guidelines for determining model fit. *Journal of Business Research Methods*, 6, 53–60.
- Hox, J.J. (2010). *Multilevel Analysis, Techniques and Applications*. New York: Routledge.
- Hu, L.-T., y Bentler, P. M. (1998). Fit indices in covariance structure modeling: Sensitivity to underparameterized model misspecification. *Psychological Methods*, 3, 424-453.
- Hu, L.-T., y Bentler, P. M. (1999) Cutoff criteria for fit indexes in covariance structure analysis: Conventional criteria versus new alternatives. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal*, 6:1, 1-55, DOI: 10.1080/10705519909540118
- Hu, L., Bentler, P. M., y Kano, Y. (1992). Can test statistics in covariance structure analysis be trusted? *Psychological Bulletin*, 112, 351-362.
- Johnshon, W., y Bouchard Jr., T. J. (2005). The structure of human intelligence: It is verbal, perceptual, and image rotation (VPR), not fluid and crystallized. *Intelligence*, 33, 393–416.

- Jöreskog, K. G. (1973). A general method for estimating a linear structural equation system, pp. 85–112. In: A. S. Goldberger y O. D. Duncan (eds.). *Structural Equation Models in the Social Sciences*. New York: Seminar Press.
- Jöreskog, K. G. y Sörbom, D. (1996). *LISREL 8: User's Reference Guide*. Chicago: Scientific Software International.
- Kaiser, H. F., & Dickman, K. (1962). Sample and population score matrices and sample correlation matrices from an arbitrary population correlation matrix. *Psychometrika*, 27, 179
- Kaufmann, S.B. (2006). Sex differences in mental rotation and spatial visualization ability: Can they be accounted for by differences in working memory capacity? *ScienceDirect. Intelligence*. 35, 211-223.
- Keesling, J. W. (1972). *Maximum Likelihood Approaches to Causal Flow Analysis*. Ph.D. Dissertation, Department of Education, University of Chicago.
- Li, CH. (2016). Confirmatory factor analysis with ordinal data: Comparing robust maximum likelihood and diagonally weighted least squares. *Behav Res*, 48: 936-949, DOI: 10.3758/s13428-015-0619-7
- Little, T. (2013). *Longitudinal Structural Equation Modeling*. The Guilford Press, New York.
- Maydeu-Olivares, A. (2017). Maximum Likelihood Estimation of Structural Equation Models for Continuous Data: Standard Errors and Goodness of Fit. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal*, 24:3, 383-394, DOI: 10.1080/10705511.2016.1269606
- Mulaik, S.A. (2009). *Linear causality modeling with structural equations*. New York: CRC Press Taylor y Francis Group.
- Muthén, B. y Kaplan, D. (1985). A comparison of methodologies for the factor analysis of non-normal Likert variables. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 38(1), pp. 171-189.

- Nevitt, J., y Hancock, G. (2000). Improving the Root Mean Square Error of Approximation for Nonnormal Conditions in Structural Equation Modeling. *The Journal of Experimental Education*, 68(3), 251-268.
- Prieto, G; Carro, J; Orgaz, B y Pulido, R. (1993). Análisis cognitivo de un test informatizado de visualización espacial. *Revista Psicothema*, Vol. 5, N.º2, 293-301.
- Prieto, G. (2008). Las aptitudes espaciales. In A. Candeias, L. Almeida, A. Roazzi, y R. Primi (Orgs.), *Inteligência: Definição e medida na confluência de múltiplas concepções* (pp. 81-126). São Paulo, SP: Casa do Psicólogo.
- Searle, S. R., Casella, G., y McCulloch, C. E. (1992). *Variance components*. New York: Wiley.
- Schumacker, R y Lomax, R. (2004). *A beginner's guide to Structural Equation Modeling*. (2.<sup>nd</sup> ed.). Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers
- Rojas, L; Ordóñez, G; Herrera, F y Mora, M. (s. f). *Marco Teórico de la Prueba de Habilidades Cuantitativas*. Universidad de Costa Rica. (documento no publicado).
- Rojas, L. (2013). Predicción de la dificultad de la prueba de Habilidades Cuantitativas de la Universidad de Costa Rica. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*. Vol 13, N. º1. agosto.
- Ruiz, M; Pardo, A y San Martín, R. (2010). Modelos de Ecuaciones Estructurales. *Papeles del Psicólogo*. Vol. 31, N. º1, enero-abril, 2010, pp. 34-45. Consejo General de Colegios Oficiales de Psicólogos. Madrid, España.
- Savalei, V. (2014). Understanding Robust Corrections in Structural Equation Modeling. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal*, 21:1, 149-160, DOI: 10.1080/10705511.2013.824793
- Satorra, A., & Bentler, P. M. (1988). Scaling corrections for chi-square statistics in covariance structure analysis. *ASA 1988 Proceedings of the Business and Economic Statistics Section* (pp. 308–313). Alexandria, VA: American Statistical Association.

- Satorra, A., & Bentler, P. M. (1994). Corrections to test statistics and standard errors in covariance structure analysis. In A. von Eye & C. C. 160 SAVALEI Clogg (Eds.), *Latent variables analysis: Applications for developmental research* (pp. 399–419). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Sivo, S.; Fan, X.; Witta, E. y Willse, J. T. (2006) . The Search for ‘Optimal’ Cutoff Properties: Fit Index Criteria in Structural Equation Modeling, *The Journal of Experimental Education*, 74, 3, pp. 267-289
- Steiger, J. H. (1990). Structural model evaluation and modification: An interval estimation approach. *Multivariate Behavioral Research*, 25(2), 173–180.
- Trochim, W. M., & Donnelly, J. P. (2006). *The research methods knowledge base* (3.<sup>rd</sup> ed.). Cincinnati, OH: Atomic Dog.
- Vale, C. D. & Maurelli, V. A. (1983) Simulating multivariate nonnormal distributions. *Psychometrika*, 48, 465-471.
- Vicerrectoría de Docencia. (2016a). Resolución VD-R-9437-2016. Normas de admisión para estudiantes de nuevo ingreso en el 2017. Universidad de Costa Rica. Recuperado de: <http://vd.ucr.ac.cr/documento/vd-r-9437-2016/>
- Vicerrectoría de Docencia. (2016b). Resolución VD-R-9439-2016. Normas de admisión para estudiantes que deseen hacer traslado de carrera o ingresar a una segunda carrera en el 2017. Universidad de Costa Rica. Recuperado de: <http://vd.ucr.ac.cr/documento/vd-r-9437-2016/>
- Wiley, D. E. (1973). The identification problem for structural equation models with unmeasured variables. In: A. S. Goldberger y O. D. Duncan (eds.). *Structural Equation Models in the Social Sciences*. New York: Seminar Press A. S.
- West, B. T. et al. (2007). *Linear Mixed Models: A Practical Guide Using Statistical Software*. Chapman y Hall.
- Yang, Y. (2005). Can the Strengths of AIC and BIC be Shared? A conflict between model identification and regression estimation. *Biometrika*. 92(4). 937-950.

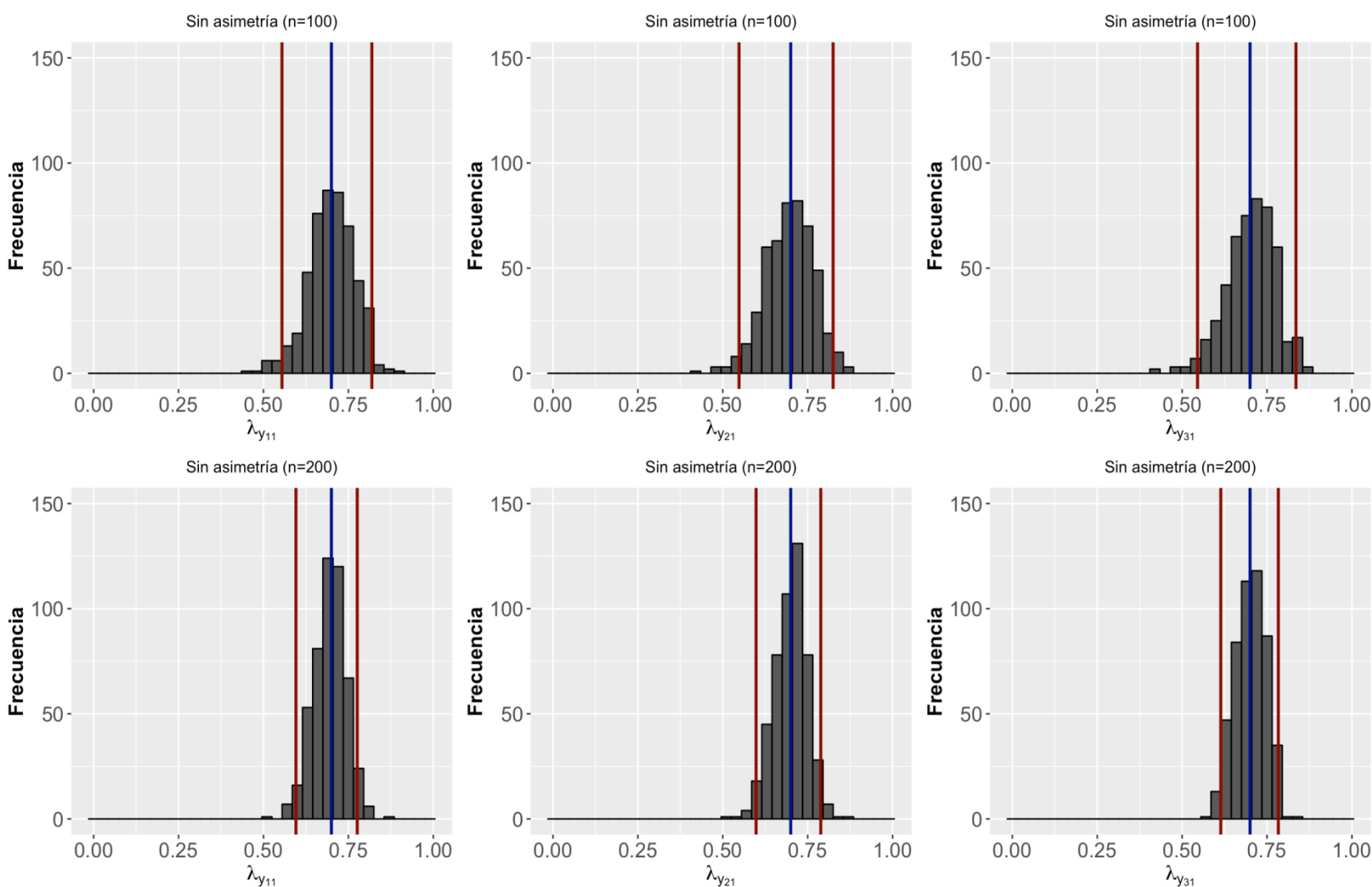
## ANEXOS

Anexo 1 Porcentajes de no convergencia de cada uno de los escenarios de simulación, según las variaciones en las condiciones de simulación (nivel de asimetría, cantidad de variables asimétricas y tamaños de muestra)

Tamaños de muestra	Nivel de asimetría	Variables medibles asimétricas	Número de escenario de simulación	Porcentaje de no convergencia
100	0,0	$y_1, y_2, y_3$	Control	0,0
	0,7	$y_1$	1	0,0
	1,7	$y_1, y_2$	2	0,0
	2,7	$y_1, y_2, y_3$	3	1,2
	0,7	$y_1$	4	0,0
	1,7	$y_1, y_2$	5	1,0
	2,7	$y_1, y_2, y_3$	6	0,0
	0,7	$y_1$	7	1,4
	1,7	$y_1, y_2$	8	0,6
	2,7	$y_1, y_2, y_3$	9	2,4
	0,0	$y_1, y_2, y_3$	Control	0,0
	0,7	$y_1$	10	0,0
200	1,7	$y_1, y_2$	11	0,0
	2,7	$y_1, y_2, y_3$	12	0,0
	0,7	$y_1$	13	0,0
	1,7	$y_1, y_2$	14	0,0
	2,7	$y_1, y_2, y_3$	15	0,0
	0,7	$y_1$	16	0,0
	1,7	$y_1, y_2$	17	0,0
	2,7	$y_1, y_2, y_3$	18	0,6

**Nota:** Cada escenario de simulación fue iterado 500 veces.

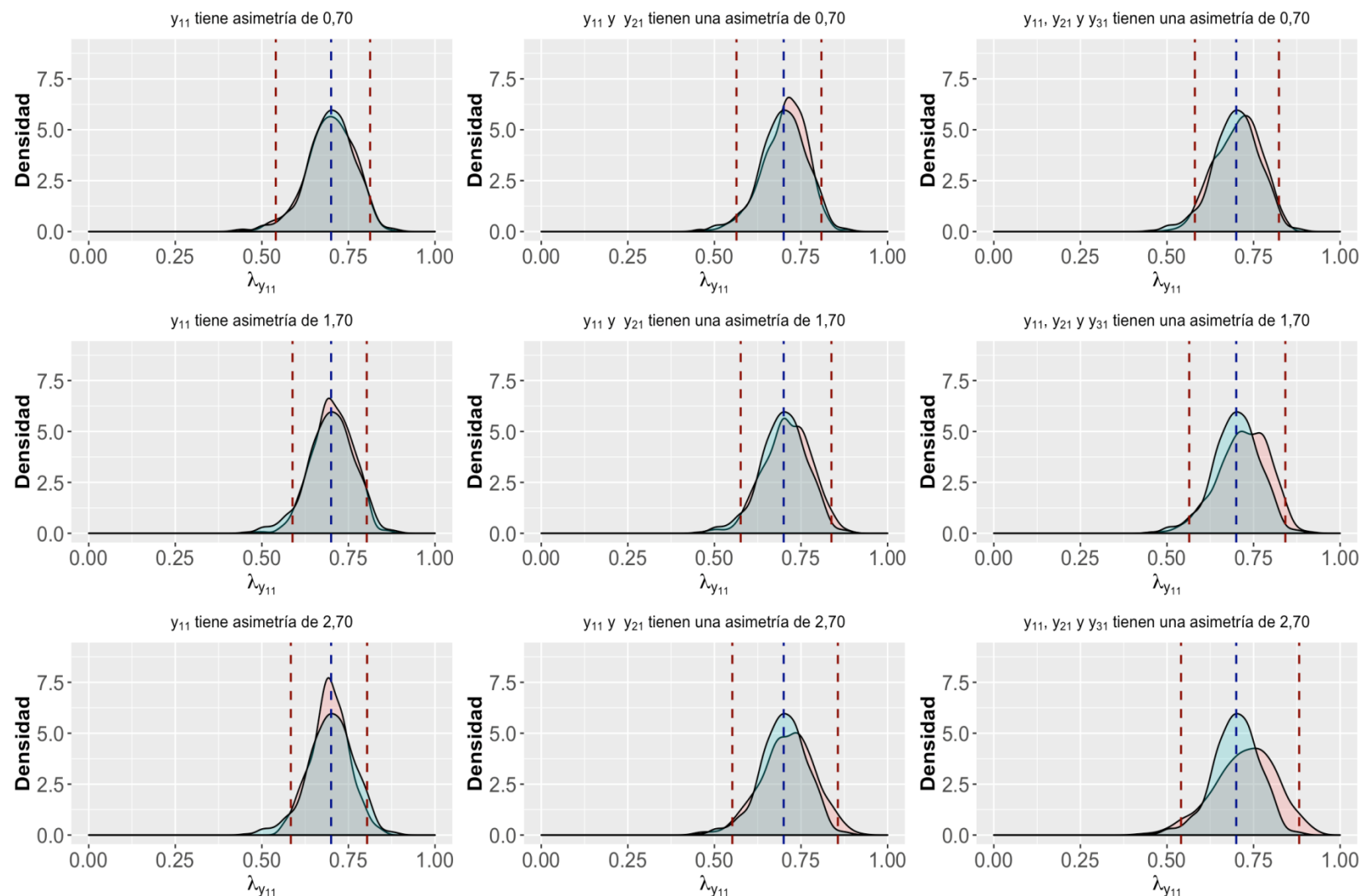
**Fuente:** Elaboración propia.



Anexo 2 Histogramas de la distribución del coeficiente  $\lambda_{y11}$ ,  $\lambda_{y21}$  y  $\lambda_{y31}$ , según las 500 iteraciones para los dos escenarios con tamaños de muestra de 100 y 200 y con distribución multinormal en las variables medibles

1/ La línea azul es el valor 0,70 con el que se fijaron las cargas factoriales en la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5

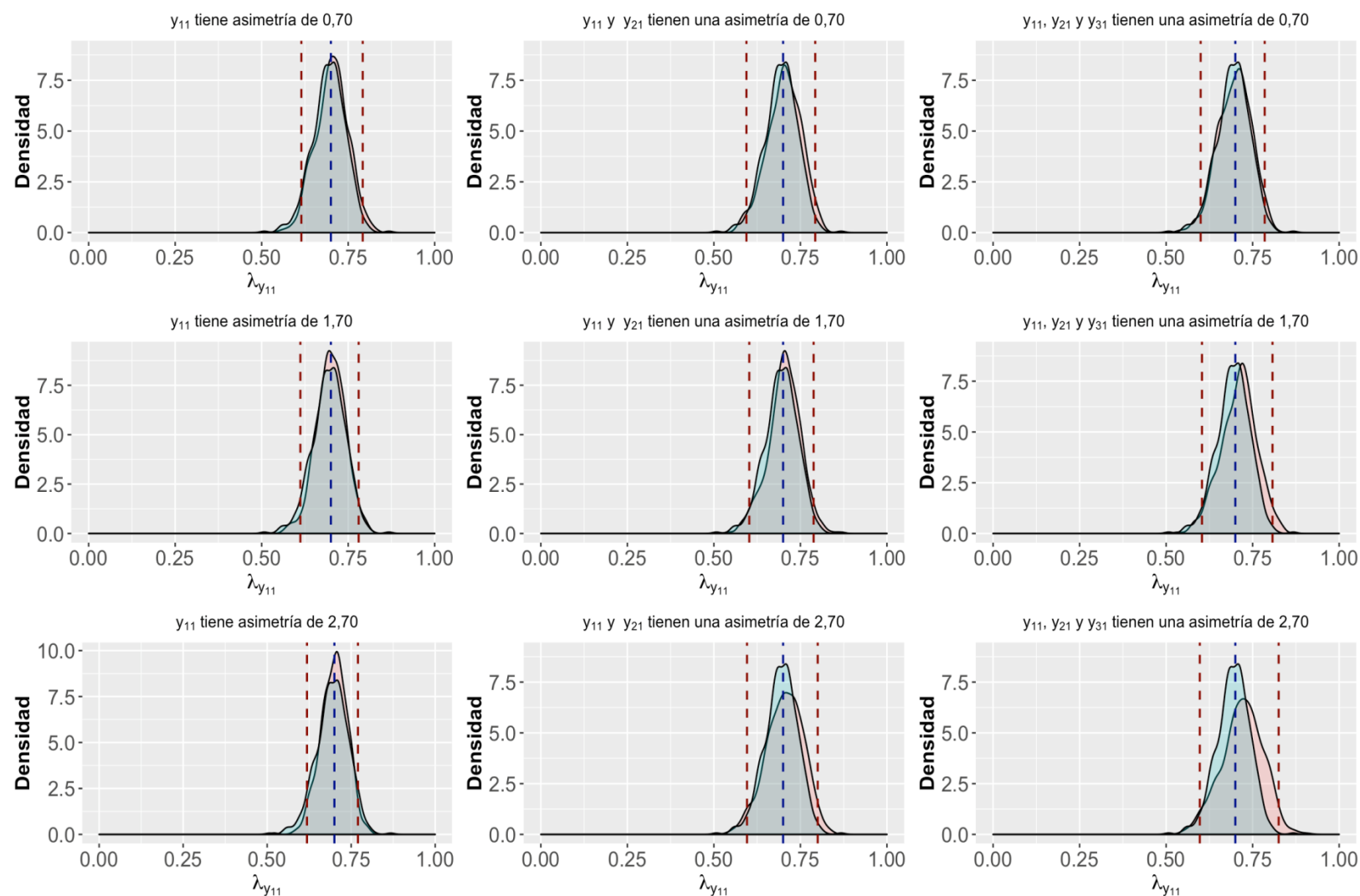
**Fuente:** Elaboración propia.



Anexo 3 Gráficos de densidad de  $\lambda_{y_{11}}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste)  
 1/ La línea azul es el valor 0,70 con el que se fijaron las cargas factoriales en la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

**Fuente:** Elaboración propia.

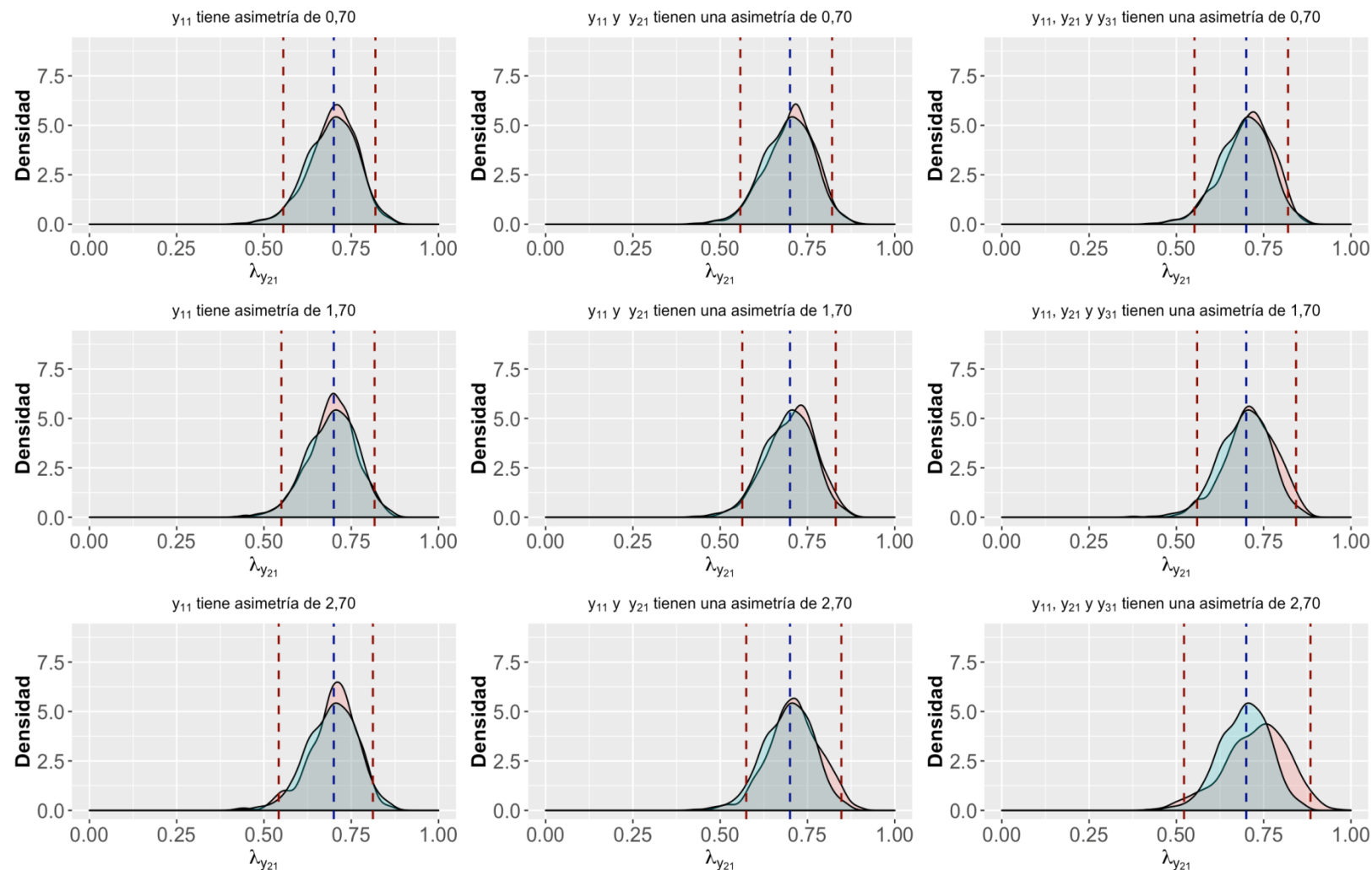




Anexo 4 Gráficos de densidad de  $\lambda_{y_{11}}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste)

1/ La línea azul es el valor 0,70 con el que se fijaron las cargas factoriales en la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

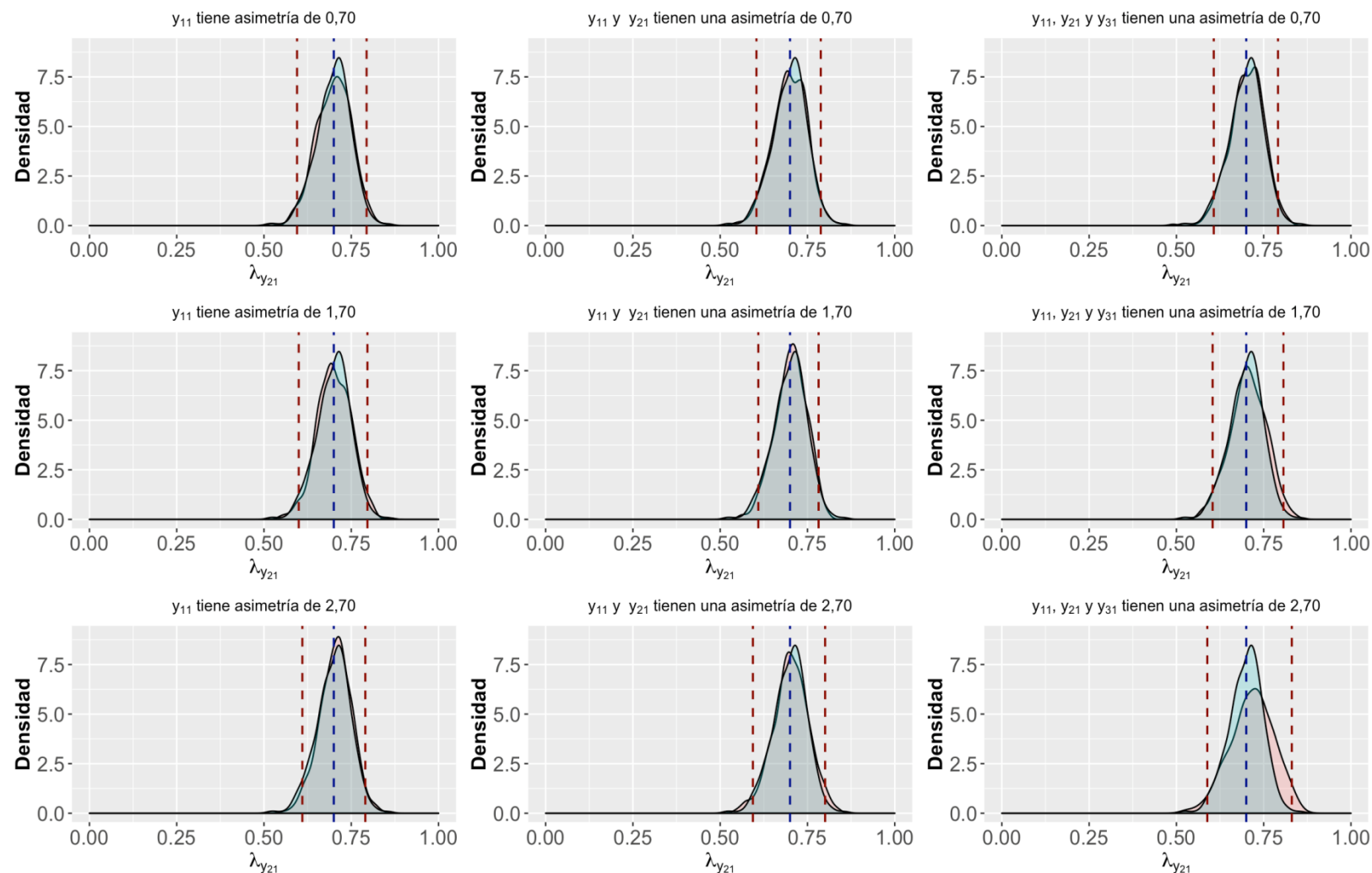
**Fuente:** Elaboración propia.



Anexo 5 Gráficos de densidad de  $\lambda_{y_{21}}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste)

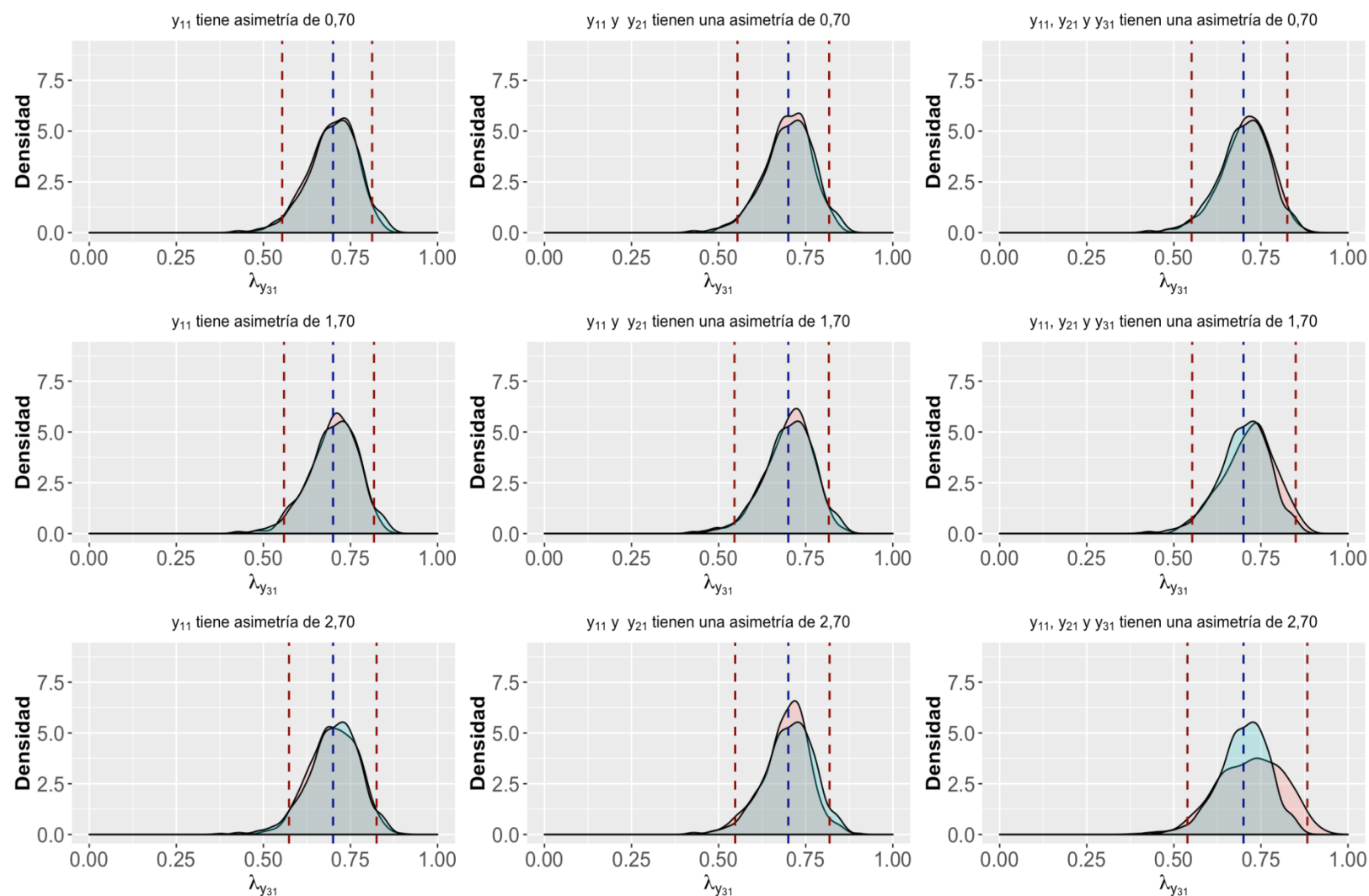
1/ La línea azul es el valor 0,70 con el que se fijaron las cargas factoriales en la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

**Fuente:** Elaboración propia.



Anexo 6 Gráficos de densidad de  $\lambda_{y_{21}}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste)  
 1/ La línea azul es el valor 0,70 con el que se fijaron las cargas factoriales en la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

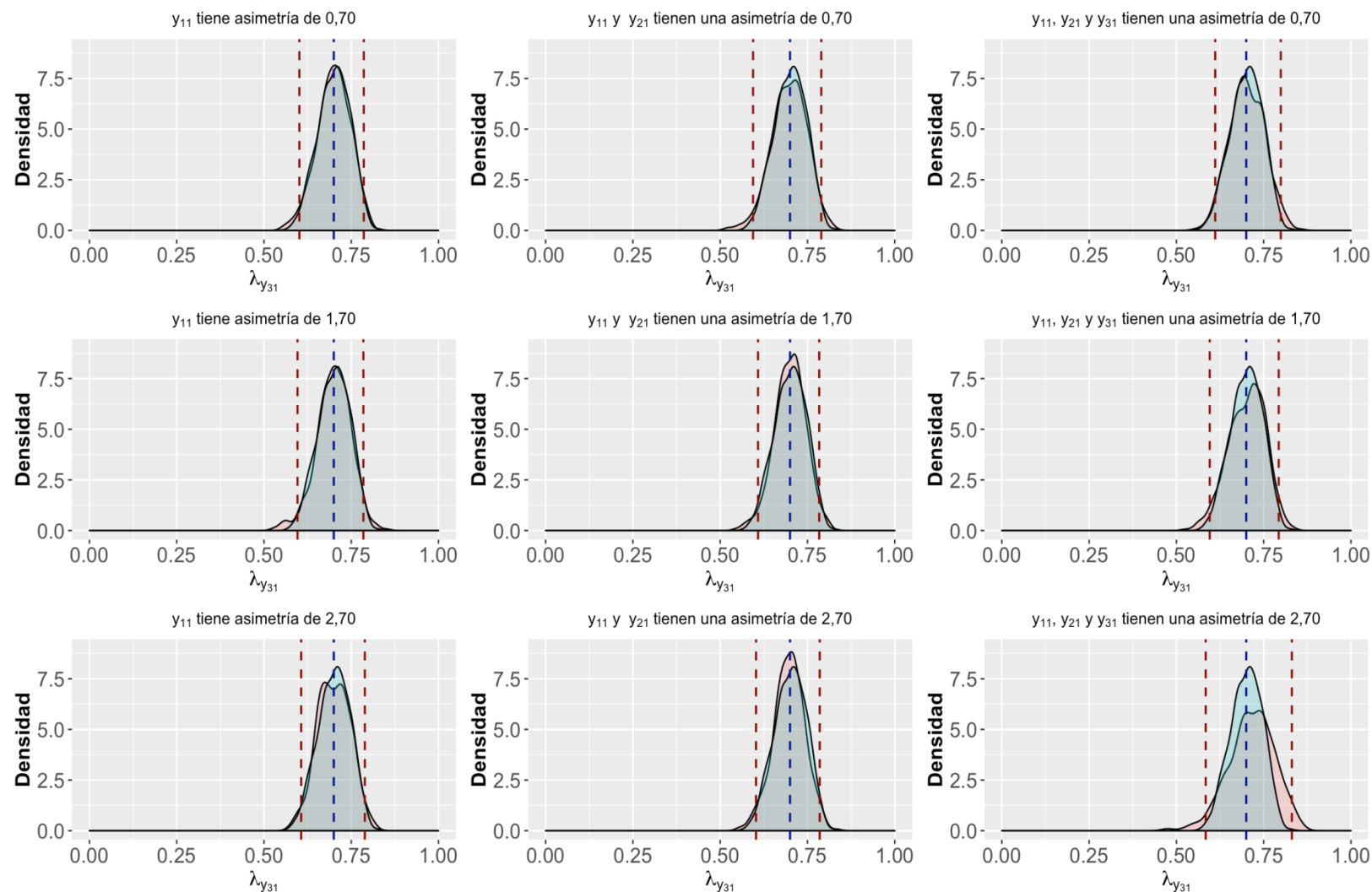
**Fuente:** Elaboración propia.



Anexo 7 Gráficos de densidad de  $\lambda_{y_{31}}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste)

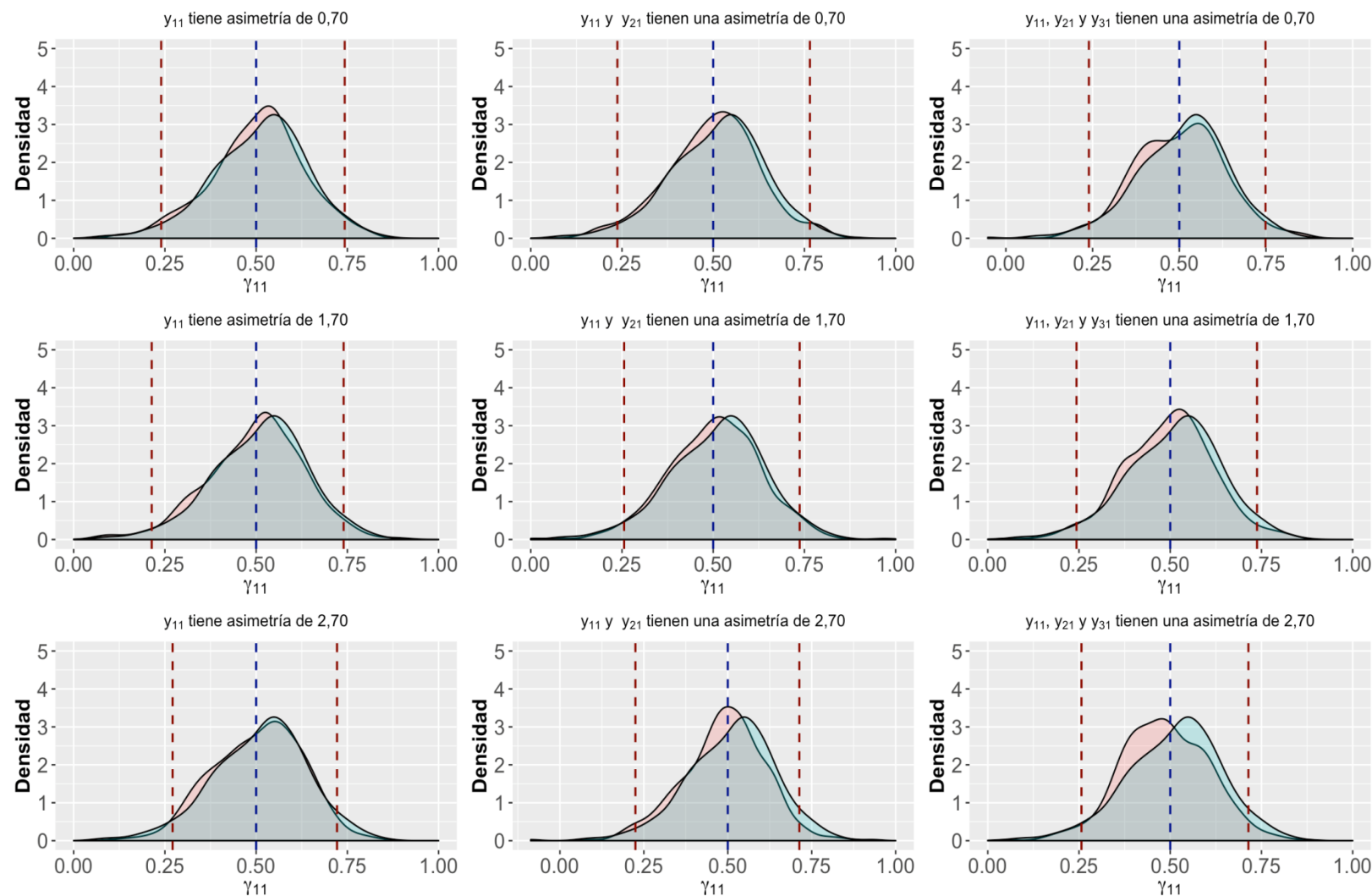
1/ La línea azul es el valor 0,70 con el que se fijaron las cargas factoriales en la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

**Fuente:** Elaboración propia.



Anexo 8 Gráficos de densidad de  $\lambda_{y_{31}}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste)  
 1/ La línea azul es el valor 0,70 con el que se fijaron las cargas factoriales en la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

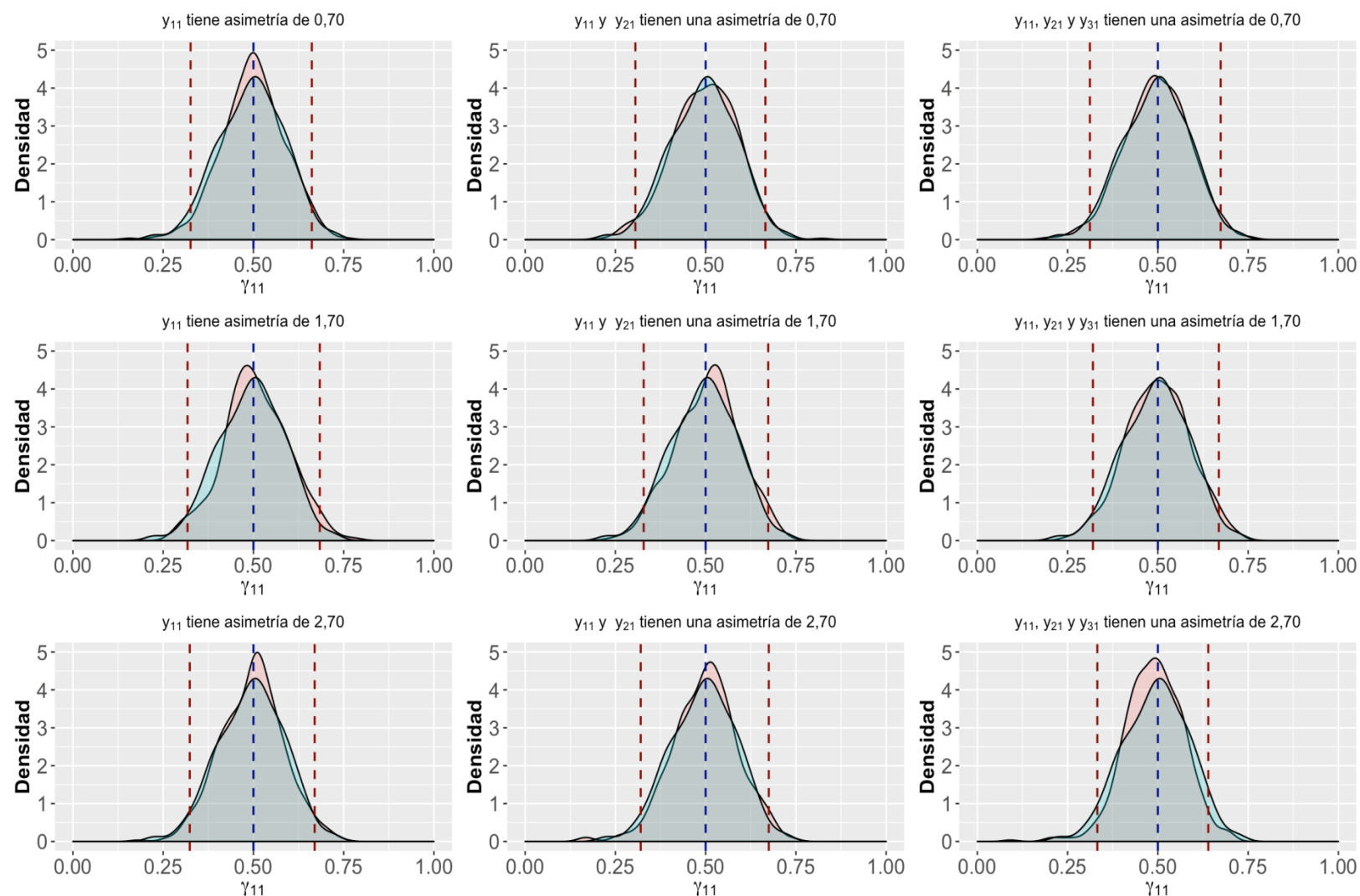
**Fuente:** Elaboración propia.



Anexo 9 Gráficos de densidad de  $\gamma_{11}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste)

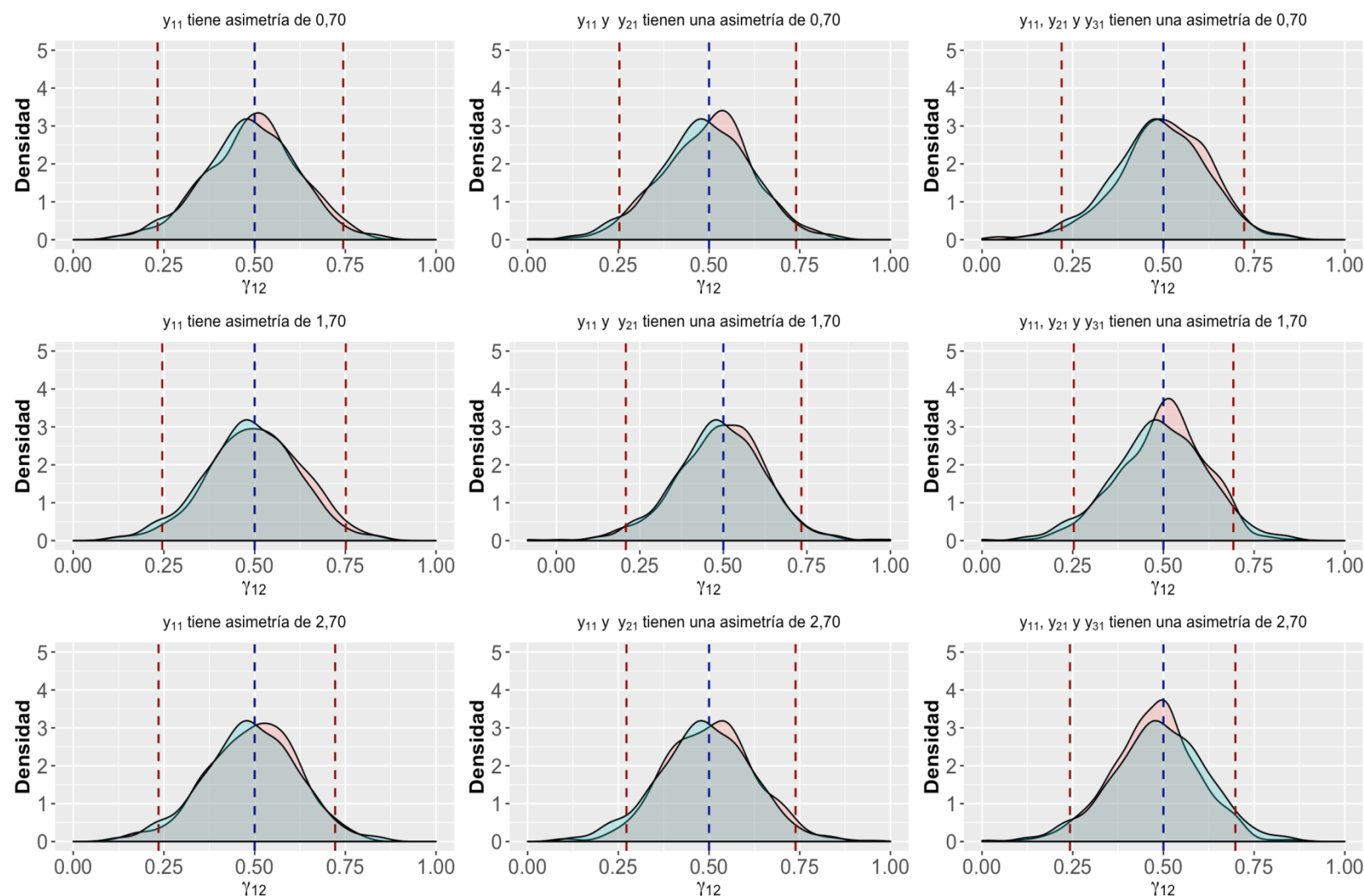
1/ La línea azul es el valor 0,50 con el que se fijó  $\gamma_{11}$  para la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

**Fuente:** Elaboración propia.



Anexo 10 Gráficos de densidad de  $\gamma_{11}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste)  
 1/ La línea azul es el valor 0,50 con el que se fijó  $\gamma_{11}$  para la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

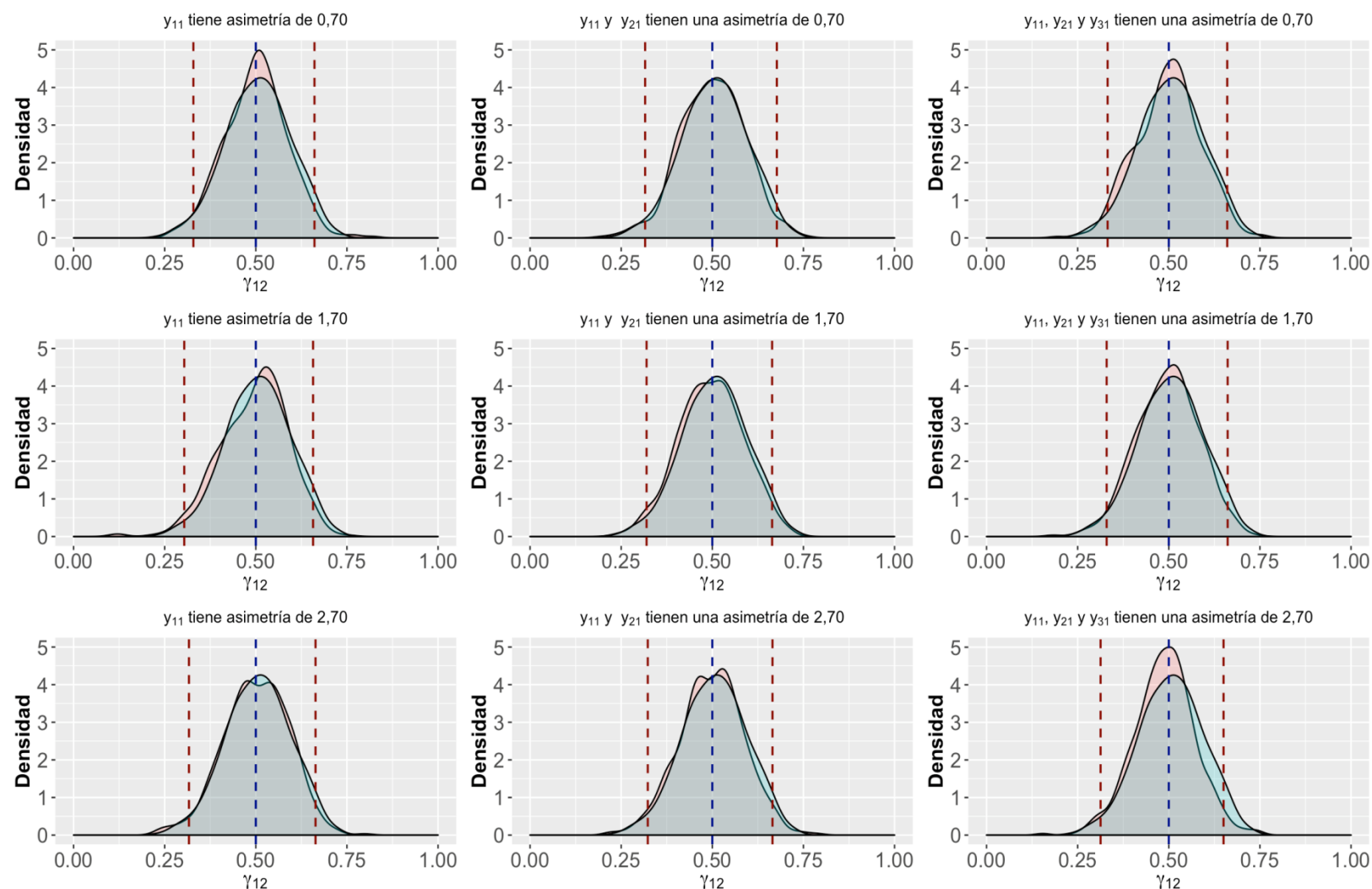
**Fuente:** Elaboración propia.



Anexo 11 Gráficos de densidad de  $\gamma_{12}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 100 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste)  
 1/ La línea azul es el valor 0,50 con el que se fijó  $\gamma_{12}$  para la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

**Fuente:** Elaboración propia.





Anexo 12 Gráficos de densidad de  $\gamma_{12}$ , basados en 500 iteraciones del modelo de simulación cuando el tamaño de muestra es de 200 para cada escenario de simulación (rosa) y su correspondiente caso control (celeste)

1/ La línea azul es el valor 0,50 con el que se fijó  $\gamma_{12}$  para la simulación y las líneas rojas son los percentiles 2,5 y 97,5.

**Fuente:** Elaboración propia.

